BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
33 D
29

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

54.
d
20.

BIBLIOTECA NAZIONALE VITT. EMANUELE
12
33 D
29

Ex Bibliotheca
majori Coll. Rom.
Societ. Jesu

Digitized by Google

310 1

Lantz Arithmet.

R
11

Digitized by Google

Colleg. Rom. Soc. Jesu 710 2

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM
LIBRI QVATVOR.

Catalog. Inscript.

In quibus,

REGVLIS ET EXEMPLIS PRACTICIS,

BREVISSIME ET CLARISSIMÈ explicantur.

Quatuor numerorum genera.

I. Rationales abſoluti.
II. Rationales coſſici.
III. Irrationales abſoluti.
IIII. Irrationales coſſici.

CVM

APPENDICE FRACTIONVM ASTRONOMICARVM.

ET

Indice capitum, articulorum, & rerum præcipuarum.

AB

IOANNE LANTZ,
è Societate IESV conſcripti.

MONACHII apud Nicolaum Henricum.

M. DC. XVI.

C5 . 5
BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

12. 33. D. 29

Digitized by Google

NOBILISSIMO ET AMPLISSIMO VIRO, DOMINO IOANNI GEORGIO HERWART AB HOHENBVRG I. V. D. SERENISSIMO BOIORVM duci ab nitimis conſiliis, Præſidi Prouinciæ Schwabæ, & inclitorum vtriuſq; Bauariæ ordinum cancellario, &c.

NON diu de Patrono, cui hanc meam de numerandi ratione, lucubratiunculam ſua auctoritate tuendam offerrem, cogitandum fuit. Nam cui potius Arithmeticam dicarem, quam principi Arithmeticorum, & in omni alia literatura verſatiſſimo? Sunt & aliæ prope mille cauſæ, quæ mihi hoc conſilium dictarunt, vt nomini M. V. laborem hunc meum inſcriberem: quarum poſtrema non eſt, quod hæc ipſa Arithmetica conſilio, auſpicijs, & liberlitate M. D. V. in lucem prodit. Quæ vtinam ita numeris ſuis abſoluta prodiret, vt tanti viri patro-

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

cinio digna videri poſſet. Etenim quo is, cui dona offeruntur in altiore cum honoris, tum ſcientiæ gradu eſt conſtitutus, tanto qui dicantur libri par eſt eſſe excellentiores. Quod cum animo agitarem, videremq; magnam inter hanc Arithmeticam, & patroni doctrinam intereſſe interuallum, vix auſus fui, illam ad aram eius ſuſpendere. Verum cum mihi M. D. V. erga omnes, cuiuſcumq; ſint literaturæ ſingularis quædam propenſio, ignota non eſſet, animum reſumpſi, & nemini, niſi M. V. eam conſecrandam exiſtimaui. Quamobrem maiorem in modum peto, vt eo animo in ſuum illam patrocinium ſuſcipiat, quo offertur. Quodſi, vti non dubito, fecerit, multis me nominibus iam ante ſibi obnoxium, pluribus adhuc obſtringet. Ingolſtadij 4. die Octob. Anno ſalutis reparatæ 1616.

M. D. V. D.

Ioannes Lantz.

AD CANDIDVM LECTOREM.

HOS *quatuor Arithmeticorum libros, candide lector, non eo conſilio ſcripſi, quod opiner facilius ex illis, quam ex aliorum laboribus numerandi artem hauriri. Non ita mea amo; non ita inſanio. Quin omnium conatus laudandos cenſeo: quanquam, vt hominum ingenia alia alijs perſpicaciora ſunt, non neſciam, alium alio, ſi vniuerſam artem ſpectes, felicius, & explicatius animi ſenſa promere: ſi ad particularia deſcendas, in ſingulis ſeorſim reperiri, in quo iure ſuo gloriari, & alijs præferri poſſit. Quæ cum ita eſſe viderem, conatus ſum ex varijs Arithmeticis præcipua, quæ ad numeros ſpectant, ſecluſis ſecretioribus quibuſdam, olim à Diophanto, auorum memoria à Cardano, & Stiphelio, noſtra à Franciſco Vieta, Ioanne Faulhabero, & aliis propoſita, nec dum tamen, quod ſciam, ſatis clare pro vulgi captu explicata, colligere, taliq; methodo diſcentibus proponere, vt abſq; magi-*

ſtro ex libello, ſi molem ſpectes, exiguo; ſi quæ continet, bene magno, Arithmetici eſſe poſſent. Quanquam non ſine ſudoribus, quando τῆς ἀρετῆς, vt habet Heſiodus ἱδρῶτα θεοὶ προπάροιθεν ἔθηκαν ἀθάνατοι. Cæterum ne præpoſterè rem aggrediatur Lector, & voti tardius, quam vellet, compos fiat, omnino librum primum, elementa inquam tam integrorum, quam fractorum numerorum: regulam item proportionum, & radicum extractiones apprimè diſcat, penituſq; combibat ante, quàm ad tres poſteriores gradum faciat, neceſſe eſt. Quod ſi fecerit, facile poſteriores, dum aliquem laborem impendat, ſcientia comprehendet. Si neglexerit, fruſtra erit omnis labor, niſi ingenij bonitas, aut labor improbus, quæ vel adamantina vincunt, ſuppetiatum eant. Vale Lector, & noſtris hiſce laboribus faue, & fruere.

AVCTORITAS R. P. PROVINCIALIS.

ARITHMETICAM Practicam Ioannis Lantz è Societate noſtra, à deſtinatis noſtræ Societatis Patribus harum rerum peritis, lectam & probatam; Ego Melchior Härtelius Societatis IESV per ſuperiorem Germaniam præpoſitus Prouincialis, facta mihi poteſtate ab Admodnm R. P. N. Mutio Vitelleſco eiusdem Societatis præpoſito Generali, in lucem edi permitto. Cui rei teſtandæ manu mea ſubſcripſi, & Sigillum Societatis conſuetum appreſſi. Landſpergæ 3. Octobris, Anno ſalutis. M. DC. XVI.

Melchior Härtelius.

Digitized by Google

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM LIBER PRIMVS.

DE NVMERIS RAtionalibus abſolutis.

NVmervs rationalis abſolutus, eſt numerus vulgaris omni carens denominatione. De quo hæc pertracto. Primo ago de Elementis numerorum integrorum. Secundo de elementis fractorum. Tertio de regulis, & praxi. Quarto de numerorum proprietatibus. Quinto de radicum extractionibus.

Capvt I.

DE INTEGRORVM NVmerorum elementis.

Elementa Arithmetica, ſunt quatuor vulgatæ ſpecies Additio, Subtractio, Multiplicatio, & Diuiſio; quibus quidam Numerationem addunt. Nos de omnibus quinque, initium à Numeratione facientes, breuiter agemus.

Articvlvs I.

DE NVMERATIONE.

Numeratio eſt enunciatio, & expreſsio valoris cuiuſcun-

iuſcunque numeri propoſiti. Supponimus autem hos decem characteres 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. ad hanc Arithmeticam accedentibus, notos eſſe. Porrò, vt quemcumque numerum propoſitum methodicè pronunciemus, hæc ſunt animaduertenda.

Primò, circularem hanc figuram o, quam cyphram appellamus, per ſe quidem nihil valere; ſed additam reliquis, eas per denariam denominationem augere: ita 20, valent viginti, cum 2, duo tantum valeant. 200, valent ducenta. 2000, duo millia. 20000, viginti millia. 200000, ducenta millia &c.

Secundò, quemlibet numerum verſus dextram primo loco poſitum, ſeipſum ſignificare ſemel; ſecundo decies; tertio centies; quarto millies; quinto decies millies; ſexto centies millies; ſeptimo, millies millies; Octauo decies millies millies, &c.

Tertiò, vt facilius numerus propoſitus enuncietur, poni ſub quarto verſus ſiniſtram, punctum, &, duobus prætermiſsis, ſub ſeptimo; rurſusq; duobus prætermiſſis, ſub decimo; itemque duobus prætermiſsis, ſub decimo tertio, &c.

Quartò, quot ſunt puncta, toties dicendum eſſe millies; ſed ſub penultimo puncto verſus dextram, pro millies, dicendum millena, ſub vltimo millia.

Quintò, tot eſſe membra quot ſunt puncta; & numerum habentem punctum ſemel; ſecundum à puncto verſus ſiniſtram decies; tertium centies, ſeipſum ſignificare.

Vltimò, cyphrarum, ſeu circulorum, nullam penitus habendam rationem, niſi quantum ad augmentum.

His ita animaduerſis hæc exempla ſic pronunciabimus.

4634276598542754
42003120676000760
849089000080787900
1000000000000000000

Primum. Quater millies, millies, millies millena millia; ſexcenties tricies quater millies, millies millena millia: ducenties ſeptuagies ſexies millies millena millia: quingenties nonagies octies millena millia: quingenta quadraginta duo millia; ſeptingenta, quinquaginta quatuor.

Secundum. Quadragies bis millies, millies, millies millena millia: ter millies, millies millena millia: centies vicies millies millena millia: ſexcenties ſeptuagies ſexies millena millia: ſeptingenta ſexaginta.

Tertium. Octingenties quadragies nouies millies, millies, millies millena millia: octogies nouies millies, millies millena millia: octogies millena millia: ſeptingenta octoginta ſeptem millia, nongenta.

Poſtremum. Millies, millies, millies, millies millena millia.

ANNOTATIO.

Poteſt pronunciatio etiam fieri per milliones, more Italorum (ſignificat millio millies millena) Noto autem puncta millionum ſupra figuras hac nota o; ac prima quidem ponitur ſupra ſeptimam figuram; ſecunda, quinq; prætermiſſis, ſupra decimam tertiam, hoc modo. 673125070643401 *qui numerus ſic pronunciatur. Sexaginta ſeptem milliones, millionum*

num: trecenti duodecim milleni milliones: quingenti ſeptem milliones: ſexaginta quatuor millia, trecenta quadraginta.

Poſſunt quoq, puncta ſub centenarijs, & denarijs poni hoc modo, 40000000000, *qui numerus ſic pronunciatur. Quater millies centies centena millia. Aut hoc modo* 40000000000. *& ſic effertur. Quater millies centies decies millena decies. Quæ pronunciationes faciles ſunt, ſi diligenter ad puncta attendatur, vt ex ſequentis exempli variatione apparet.*

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies millies millena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *centies centena millena millies.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies centena millia.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *millies centies millena centies.*
1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0. *decies cẽties millena millia dec.*

Poteſt idem exemplum adhuc pluribus modis pronunciari, vt quilibet videt. Duriuſcula videntur quædam dictarum pronunciationum, non inficior; ſed artem, non verba conſidera.

Articvlvs II.

DE ADDITIONE.

Additio eſt duorum, aut plurium numerorum in vnam ſummam collectio. Quæ collectio, vt accuratior ſit, hæc obſeruentur.

Primo, numeri ſibi mutuo perpendiculariter ſupponantur, primus verſus dextram ſub primo, ſecundus ſub ſecundo, tertius ſub tertio &c. & defectus, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquatur, vt in ſecundo, & tertio exemplis, factum vides.

Secundo, in operando procede à dextra verſus ſiniſtram,

ſtram, colligens in vnam ſummam omnes numeros primo loco verſus dextram poſitos. Quæ ſumma ſi vna figura ſcribi poſsit, ſcribatur infra lineam directè ſub numeris primo loco poſitis; ſi vna figura ſumma illa ſcribi non poſſit, ſcribatur minor, hoc eſt, quæ verſus dextram eſt, infra lineam; maior, quæ verſus ſiniſtram eſt, retineatur pro ſequente operatione.

Tertiò, cyphræ hîc, vt & in reliquis ſpeciebus, nihil penitus curandæ ſunt. His obſeruatis ſequentia exempla facilè addemus.

Primum exemplum; Sint in vnam ſummam colligendi hi numeri, 4253, 3425. collocatione vt dictum eſt facta. Dico primo 3. & 5. faciunt 8; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 5. & 2. faciunt 7; quibus quoque infra lineam poſitis, Dico tertio 2. & 4. faciunt 6; & his infra lineam poſitis, Dico vlt. 4. & 3. faciunt 7. Numeri ergo 4253. & 3425. in vnam ſummam collecti, faciunt 7678.

4253
3425
7678

Secundum exemplum. Sint addendi hi tres numeri, 8765. 5794. 980. Collocatione facta, Dico primo 5. & 4. (nam cyphra non curatur) faciunt 9; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo 6. 9. & 8. faciunt 23; pono figuram dextram, hoc eſt, 3, infra lineam, retineo 2; & dico 7. 7. 9. & 2. prius retenta, faciunt 25. pono 5. infra lineã, directe ſub 9. retineo 2, & dico vlt. 8. 5. & 2. retẽta faciunt 15. pono totũ infra lineam, nimirũ 5. ſub 5; 1 paulo remotius verſus ſiniſtrã. Si ergo 8765. 5794. & 980. in vnam ſummam colligantur, fient 15539.

8765
5794
980
15539

Tertium exemplum. Sint hi numeri 7500402. 980091. 75215. 5301. 900. addendi, Collocatione facta,

cta, vt defectus ex parte ſiniſtra relinquatur. Dico primo 2. 1. 5. & 1. faciunt 9; quibus infra lineá poſitis. Dico ſecundo 9, & 1. faciunt 10; pono 0. infra lineam, retineo 1. Dico tertio 4. 2. 3. 9. & prius retentum, faciunt 19; pono 9 infra lineam, retineo 1. Dico quarto 5. 5. & prius retentum, faciunt 11. pono 1. infra lineam, retineo 1. Dico quinto 8. 7. & retentum faciunt 16; pono 6 infra lineam, retineo 1. Dico ſexto 5. 9. & retentum, faciunt 15; pono 5. infra lineam, retineo 1. dico vltimo 7. & retentum faciunt 8. Ergo ſumma dictorum numerorum eſt 8561909.

```
 7500402
  980091
   75215
    5301
     900
--------
 8561909
```

EXAMEN.

Abiice 9. quoties potes, tam ex numeris addendis, quam ex addito, hoc eſt, tam ex ſupra, quam ex infra lineam poſitis, nulla habita ordinis, aut loci ratione; ſi enim reſidua æqualia fuerint, probabile eſt operationem bene habere. Ita vides in primo exemplo poſt abiectionem 9. reſtare 1. & 1; in ſecundo 5. & 5; in tertio 2. & 2. Si reſidua fuerint inæqualia, certum eſt erratum eſſe: quare operatio iteranda erit. Dixi ſi reſidua æqualia fuerint, probabile eſſe operationem bene habere, nam certum non eſt; ſiquidem in appoſito exemplo, reſidua ſunt æqualia, at in operatione plurimum erratum eſt.

```
358  7
234  7
---
835
```

ARTICVLVS III.

DE SVBTRACTIONE.

Sub-

Subtractio eſt ſubductio minoris numeri ex maiore, aut æqualis ex æquali. Et vt melius, quomodo numerus ex numero ſubducatur, intelligas, hæc obſerua.

Primo minor numerus, hoc eſt, ſubducendus, ſupponendus eſt maiori, ſiue illi, ex quo fit ſubductio; & defectus, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquendus.

Secundo, ſi figura inferior maior fuerit ſuperiore, intellige ad ſuperiorem aſſumpta eſſe 10. quæ vt compenſes appone ſequenti figuræ punctum, quod in ſequente operatione pro vnitate numerandum eſſe memineris.

Tertio, etiam hic cyphræ non ſunt curandæ.

His obſeruatis ad exempla accedimus. Primũ, volo 253 ex 485 ſubtrahere. Collocatis numeris more conſueto, Dico primo 3 ex 5, reſtant 2; quibus infra lineam directè ſub 3 poſitis, Dico ſecundo 5 ex 8, reſtant 3; quibus quoque infra lineam poſitis, dico vltimo 2 ex 4, reſtant 2 quæ pono infra lineam. Igitur ſubtractis 253 ex 485, reſtant 232.

```
485   8
253   8
---
232
```

Secundum exemplum ſint 4297, ex 7345 ſubtrahenda. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo 7 ex 5, quod cũ fieri non poſſit, pono ſub proximè inferiore, nempe ſub 9 punctũ, & intelligo ad 5 aſſumpta eſſe 10. Quo facto dico 7 ex 15, reſtant 8; quibus infra lineam poſitis, dico ſecundo 10 ex 4 (nam 9, & punctum, quod vnum valet, faciunt 10) dico inquam, 10 ex 4, quod cum fieri nequeat, pono ſub 2, punctum, & intelligo 10 ad 4 aſſumpta, vt fiant 14. Dico ergo 10 ex 14, reſtant 4, quibus infra lineam poſitis, Dico tertio 3 ex 3, reſtat 0, ſiue nihil; pono ergo 0 infra lineam; Dico poſtremo 4 ex 7, reſtant

```
7345   1
4.2.97 1
----
3048
```

reſtant 3. Si ergo 4297, ex 7345 ſubtrahantur, reſtant 3048.

Tertium exemplum. Sint 70099 ex 801200 ſubtrahenda. Collocatis numeris more ſolito, Dico primo 9 ex 0 accipere non poſſum; pono ergo ſub ſequente, nempe ſub 9, punctum, & intelligo 10 ad 0 primum aſſumpta; dico ergo 9 ex 10, reſtat 1, quo infra lineam poſito, Dico ſecundo 10 ex 0 accipere non poſſum; poſito igitur ſub ſequente 0 puncto, Dico 10 ex 10, reſtat 0; quo infra lineam poſito, Dico tertio 1 (punctum enim vnum valet) ex 2, reſtat 1. Dico quarto 0 ex 1, reſtat 1. Rurſus dico 7 ex 0, quod cum fieri non poſſit, pono punctum ſub 8, & dico 7 ex 10, reſtant 3; quibus infra lineam poſitis, dico vltimo 1 ex 8, reſtant 7. Si ergo 70099 ex 801200 ſubtrahantur, reſtant 731101.

801200	2
. 70099	2
731101	

EXAMEN.

Abiice 9, quoties potes, tam ex ſupremo, hoc eſt, ex quo facta eſt ſubtractio; quam ex duobus inferioribus, hoc eſt, ex ſubtrahendo, & reſiduo: ſi namque facta illa abiectione reſidua æqualia fuerint, probabile eſt operationem bonam eſſe: ſi verò æqualia non fuerint, certnm eſt erratum eſſe. Itá vides in primo exemplo, reſidua eſſe, 8 & 8; in ſecundo 1 & 1; in tertio 2 & 2. Dixi ſi reſidua æqualia fuerint, probabile eſſe operationem bonam eſſe: ſiquidem fieri poteſt, quam-

quamuis rarò, vt probatione bona exiſtente, operatio vicioſa ſit, vt in adiecto exemplo patet.

4	2	7	4
3	6	3	4
2	3	5	

Certiſsimum eſt operationem bonam eſſe, ſi, duobus inferioribus inuicem additis, prodeat ſuperior. Poteſt itaque ſubtractio per Additionem; ſed & Additio per ſubtractionem probari; ſi omnes addendi ſigillatim ex ſumma ſubtrahantur, nihilq; remaneat. Vt ſi in ſecundo Additionis exemplo 8765 ſubtrahantur ex 15539; ex reſiduo 5794; & rurſus ex reſiduo 980. nihilque remaneat, erit operatio bona.

Articvlvs IIII.

De Multiplicatione.

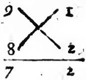
Multiplicatio eſt inuentio numeri, in quo alter multiplicantium toties continetur, quoties in altero vnitas. Vt ſi multiplicentur 8 per 4. producentur 32. in quo numero toties continentur 4; quoties in 8 vnitas; vel in 32. toties continentur 8. quoties in 4. vnitas. Sed antequam ad Multiplicationem veniamus, proponenda prius eſt menſa Pythagoræ, & regula, quã vocãt Pigri; quarum vtraq; tantum vſque ad 9. extenditur, etſi menſa Pythagoræ in infinitum ex-

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

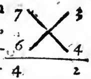
extendi poſſit. Menſæ huius ſtructura facilis eſt.

Vſum eius accipe. Volens ſcire, quantum faciant octies 9; quæro 8 in capite, 9 in latere ſiniſtro tabulæ; vel contra 9 in capite; 8 in latere; vtrum enim fecero, offeret angulus communis 72. Item volens ſcire quantum faciant ſexies 7, quæro 6 in capite, 7 in latere; vel contra, vtrum enim fecero, offeret angulus communis 42.

Regula Pigri ſic habet. Suppono ſibi mutuo numeros in ſe ducẽdos, illiſq; verſus dextram tantum appono, vt fiant 10. Quo facto numeros appoſitos duco in ſe, productum, ſi vna figura ſcribi poſsit, pono infra lineam; ſi non poſſit, ſcribo infra lineam figuram dextram, retineo ſiniſtram: poſtremo numeros appoſitos per crucem ex prioribus numeris ſubtraho, reſiduum cum retento pono infra lineam, & habeo quæſitum. Exemplum. Volo ſcire quantum faciant octies 9: ſuppono ſibi mutuo 8 & 9; atque ad latus dextrum 9 pono 1; ad latus 8, 2, vt fiant 10, & dico ſemel 2 facit 2, quibus infra lineam poſitis, ſubtraho per crucem, vel 1 ex 8; vel 2 ex 9, vtrum enim fecero, reſtabunt 7, quibus infra lineam poſitis, video octies 9 facere 72.



Aliud exemplum. Volo ſcire quantum faciant ſexies 7; ſuppono ſibi mutuo 6 & 7, & dextrorſum illis appono 3 & 4, vt 10 fiant. Deinde dico ter 4 facit 12: poſitis igitur 2 infra lineam, retento 1, ſubtraho vel 3 ex 6; vel 4 ex 7, vtrum enim fecero, reſtant 3, quæ ſi cum prius retento ponam infra lineam, video ſexies 7 facere 42.



His expeditis nota primo, etſi integrum ſit, quemcunque

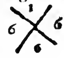
cunque multiplicantium in ſuperiore loco collocare; conueniens tamen eſſe, vt maior ſuperiorem, minor occupet inferiorem.

Secundo, defectum, ſi quis fuerit, ex parte ſiniſtra relinquendum.

Tertio, ſi inferior plures figuras habuerit, omnes inferioris in omnes ſuperioris ſigillatim eſſe multiplicandas, & primas productorum figuras ſub propriis inferioris multiplicantis figuris collocandas, & reliquas ordine ſiniſtrorſum.

Quarto, omnia producta in vnam ſummã colligenda.

His notatis, exempla proponimus. Primum ſint 4654 per 6 multiplicanda. Collocatis numeris, vt vides. Dico ſexies 4 faciunt 24: pono 4 infra lineam, retineo 2. Dico rurſus ſexies 5 faciunt 30, quæ cum 2 retentis faciunt 32: poſitis igitur 2 infra lineam, & retentis 3, Dico tertio ſexies 6, faciunt 36, quæ cum 3 retẽtis faciunt 39: poſitis ergo 9 infra lineã & retentis 3, dico poſtremo ſexies 4 faciunt 24, quæ cum tribus retẽtis faciunt 27; pono totum infra lineam, quod in fine ſemper fit.




```
 4654
    6
-----
27924
```

Secundum. Sint 92075 per 234 multiplicanda. Collocatis numeris, vt defectus ex parte ſiniſtr relinquatur, Dico primo, Quater 5, faciunt 20: pono o infra lineam directè ſub 4, retineo 2. Dico ſecundo quater 7 faciunt 28, quæ cum 2 retentis faciũt 30: pono o infra lineam, retineo 3.

```
   92075
     234
--------
  368300
 276225
184150
--------
21545550
```



dico

dico tertio quater o eſt o; pono infra lineam 3 retenta. Dico quarto quater 2, faciunt 8; pono 8 infra lineã. Dico poſtremo quater 9, faciunt 36; pono totum infra lineam. Pergo iam ad ſecundam figuram 3 quam multiplico in omnes figuras ſuperioris multiplicantis, hoc modo, Ter 5 faciunt 15: pono 5 infra lineã directè ſub 5; retineo 1. Dico ſecundo ter 7, faciunt 21; quæ, & prius retentum faciunt 22: pono 2 infra lineam retineo 2. Dico tertio ter o. eſt o; pono infra lineam 2 prius retenta. Dico quarto ter 2 faciunt 6. Dico vltimo ter 9 faciunt 27. Pergo deniq; ad tertiam figuram 2, & dico, bis 5 faciunt 10: pono o directè ſub 2, retineo 1. Dico ſecundo, bis 7, &c. His expeditis addo inuicem tres numeros duabus lineis incluſos, & conflo 21545550.

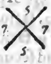


23002
5004
92008
115010
115102008

Tertium exemplum. Sint multiplicanda 23002, per 5004. Collocatis numeris, vt cernis, Dico primo, quater 2, ſunt 8; quibus infra lineam poſitis, Dico ſecundo quater o eſt o: poſito igitur o infra lineam, dico tertio quater o eſt o; quo infra lineam poſito, Dico quarto quater 3 faciunt 12: pono 2 infra lineam, retineo 1. Dico vltimo quater 2, faciunt 8, quæ cum prius retento pono infra lineam. Deinde omiſſis cyphris inferioris multiplicantis, pergo ad 5, & dico quinquies 2, faciunt 10: pono, o infra lineam directè ſub 5, retineo 1. Dico ſecundo quinquies o eſt o: pono infra lineã prius retentũ, & dico quinquies o eſt o, poſitoq; o infra lineam dico quinquies 3 faciunt 15, &c. Hoc facto numeros lineis incluſos addo, & con-

 flo

ſio 115102008. Nota ſi in principio vnius, vel vtriuſq; multiplicãtis ſint cyphræ, eas ſtatim infra lineam ponendas, & cum reliquis figuris agendum, vt eſt dictum.



6800
2300
2040000
136
15640000

Exempli cauſa, ſi ſint 6800 per 2300 multiplicanda, ponántur 4 cyphræ infra lineam, & cum reliquis figuris inſtituatur operatio more conſueto.

Examen.

Abiice ex vtroq; multiplicante 9, quoties potes reſidua in inferiore, & ſuperiore crucis parte poſita, in ſe ducito: ex producto reiicito rurſus 9, quoties potes, reſiduo in alterutro crucis latere poſito: cui ſi reſiduũ producti ęquale fuerit probabile eſt operationẽ probã eſſe: ſi æquale non fuerit, certũ eſt, erratũ eſſe. Ita reiectis ex vtroq; multiplicãte 9, quoties fieri poteſt, reſidua ſunt in 1. exemplo, 1 & 6. in ſecundo 5 & 0. In tertio, 7 & 0. In quarto 5, & 5. His in ſe ductis, producuntur in primo exemplo, 6. In ſecũdo, 0. In tertio, 0. In quarto 25. Ex his rurſus reiectis 9 (quanquã in tribus prioribus exemplis non ſit neceeſſe) quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo 6. In ſecundo, 0. In tertio, 0. In quarto 7. His reſiduis, quia reſidua productorum æqualia ſunt, probabile eſt operationes probas eſſe; non tamen certum. Nam etiam hic poteſt, examine bono exiſtente, operatio vicioſa eſſe.

Articvlvs V.

De Divisione.

Diui-

Diuiſio eſt inuentio numeri in quo toties continetur vnitas, quoties Diuiſor in diuidendo. Vt ſi diuidantur 20 per 4, prouenient 5; in quo numero toties vnitas continetur, quoties 4 in 20.

Vel diuiſio eſt inuentio numeri, qui toties in diuidendo continetur, quoties vnitas in diuiſore. Quoties enim vnitas in 4 continetur, toties continentur 5 in 20. Vocatur numerus inuentus, tum quotiens, ſeu quotus, tum proueniens.

Cæterum, vt facilius quemuis numerum maiorem per minorem diuidamus, notentur hæc. Primo à ſiniſtra verſus dextram in operatione procedẽdum, adeoq; figuram vltimam diuiſoris ſub vltima diuidendi collocandam, ſiquidem vltima diuiſoris minor ſit vltima diuidendi, aut æqualis, ſi maior ſub penultima. Quod ſi vna, duæ, aut etiam plures diuidendi, & diuiſoris verſus ſiniſtram ſint æquales, & penultima, aut antepenultima &c. Diuiſoris maior, erit nihilominus vltima diuiſoris ſub penultima diuidendi collocanda, vt hic apparet.

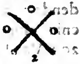
4 5 6 7 8
4 5 8

Secundo, ſi diuiſor plures habuerit figuras per omnes quotum inuentum eſſe multiplicandum, & productum ex diuidendo ſubtrahendum.

Tertio, abſoluta vna operatione, diuiſorem per vnam figuram verſus dextram promouendam, & ſi nihil accipi poſſit, cyphram ad quotum ponendũm (quoties enim promouetur diuiſor, aliquid ad quotum ponitur) rurſuſque diuiſorem promouendum.

Quarto, quantum pro quoto accipiendum ſit, vſu potius, & praxi, quam præceptis diſcitur; poteſt tamen aliquid ſubſidij mẽſa Pythagoræ preſtare, ſi nimirũ

prima diuiſoris figura in latere ſiniſtro, in cellulis dextrorſum figuræ reſpondentibus, numerus diuidendus ſupra primam diuiſoris figuram poſitus, aut ſi non inueniatur, proxime minor, quæratur; nam ſi ab illo numero vſque ad caput tabulæ aſcendatur, erit numerus in capite inuentus, numerus ad quotum ponendus, aut certè minor.



His obſeruatis, ſint primo 486 per 2 diuidenda. Pono 2 ſub 4, & video quoties 2 in 4 contineantur; continentur bis: 2 ergo poſt lunulam pono. Deinde promoto diuiſore 2 ſub 8, video quoties 2 in 8 contineantur, vel quæro 2 in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ, & dextrorſum vſque ad 8 pergo; & hinc vſq; ad caput tabulæ aſcendo, & offendo in capite 4, quæ ad quotum pono. Promoueo deinde rurſus diuiſorem 2 ſub 6, & video eum ter in 6 contineri: 3 ergo ad quotum pono, & eſt operatio abſoluta.

486 (243
222

Secundum exemplum. Sint 16297 per 4 diuidenda, hoc eſt, quatuor inter ſe diuidant 16297 aureos. Pono diuiſorem 4 ſub 6, non ſub 1, quod 4 plura ſint quam 1, & dico 4 in 16 continentur quater: vel quæro in latere ſiniſtro menſæ Pythagoræ 4, & dextrorſum vſq; ad 16 pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioq; 4: quibus poſt lunulam poſitis, deletiſque 1, 6, 4, promoueo diuiſorem 4 ſub 1, & video 4 in 2 non contineri, cum 4 excedant. Poſita ergo ad quotum cyphra, promotoq; diuiſore



1
16297 (4074
4444

4 ſub

4 ſub 9, Dico 4 in 29 continentur ſepties; ſeu quæro 4. in latere ſiniſtro tabulæ, dextrorſumque vſque ad 28, numerum proximè minorem numero 29 pergo, & hinc ad caput aſcendo, reperioque 7; quibus ad quotum poſitis, & 1, quo 29 excedunt 28 ſupra 9 collocato, promoueo diuiſorem 4 ſub 7, & video 4 in 17 quater contineri & reſtare 1. Igitur 4 ad quotum, & 1 ſupra 7 poſitis, erit diuiſio abſoluta. Hoc eſt, ſi 4 inter ſe 16297 aureos diuidant, capiet quilibet 4074, ſupereſt 1.

Tertium exemplum. Sint 980540 per 368 diuidenda. Collocatis numeris more conſueto, vt in prima operatione vides, aduerte quoties 3 in 9 contineantur; cōtinentur quidem ter: ſed 3 accipere non potes, quod ter ſex faciant 18, quæ ex 8 ſupra 6 poſitis auferri non poſſunt; cum 18 excedant 8: accipe ergo tantum 2, quibus ad quotum poſitis, duc omnes diuiſoris figuras in quotum 2, dicendo bis 3 ſunt 6, quibus ex 9 ſubtractis; reſtant 3, quæ pone ſupra 9, deletis 9 & 3, & dic bis 6 faciunt 12, quibus ex 38 ſubtractis, reſtant 26, vt in ſecunda operatione cernis. Dic tertio bis 8 faciunt 16, quibus ex 260 ſubtractis, reſtāt 244, vt in tertia operatione cernis. Promoto iam diuiſore, hoc eſt, poſitis 3 ſub 6, ſex ſub 8, octo ſub 5, vt in tertia apparet operatione, vide quoties 3 in 24 continneantur; continentur quidē octies:

3 Operat. 1.
980540 (2
368

2 Operat. 2.
36
980560 (2
368

24 Oper. 3.
364
980549 (2
3688
36

6 Oper. 4.
24
364
980540 (26
3688
36

 ſed

ſed 8 propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere non potes; imo ne 7 quidem, ſiquidem ſi 7 acciperes, reſtarent 4, ex quibus 42, quæ fiunt ex ductu 6 in 7, auferri non poſſunt. Accipe ergo tantum 6, & reſtant 6. Poſitis itaq; 6 poſt lunulam, & 6 reſiduis ſupra 4, vt in quarta operat. Dic ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 64 ſubtractis, reſtant 28 vt in quinta operat. cernis. Dic quoque octies 6 faciunt 48, quibus ex 285 ſubtractis, reſtant 237, vt in ſexta operat. vides. Promoto iterum diuiſore, vt in ſexta operatione apparet, vide quoties 3 in 23 contineantur: continentur quidem ſepties; at propter ſequentes diuiſoris figuras 6 & 8, accipere 7 non potes: accipe ergo tantum 6, & reſtant 5, vt in ſeptima operat. cernis. Dic iam ſexies 6 faciunt 36; quibus ex 57 ſubtractis, reſtant 21, vt in octaua operat. vides. Dic quoque ſexies 8 faciuut 48, quibus ex 214 ſubtractis, reſtant 166, vt in nona operat. cernis.

Oper. 5.

```
    2
    6
  248
  364
  98540 (26
  3688
   36
```

Oper. 6.

```
    2
   63
  248
  3647
  98540 (26
  36888
   366
```

Oper. 7.

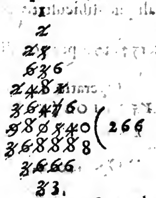
```
     3
    25
    63
   248
  3647
  98540 (266
  36888
   366
    3
```

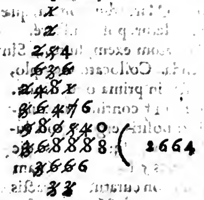
Oper. 8.

```
    2
   25
   63
  2481
  3647
  98540 (626
  36888
   366
    3
```

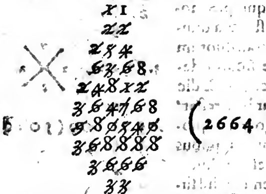
Pro

Operatio 9. Operatio 10.





Operatio 11.



Promoto rurſus diuiſore, vt in nona apparet operatione. Vide quoties 3 in 16 contineantur, continentur quidē quinquies: verum propter ſequentes diuiſoris figuras, accipere nequis: accipe ergo tantum 4, & reſtant 4. poſitis itaque 4 poſt lunulam, & 4 reſiduis ſupra 6, vt in decima operat. cernis, multiplica tam 6, quam 8 diuiſores per 4, & producta ſubtrahe ex 460, vt hactenus docuimus, eritque tota diuiſio abſoluta, vt in vndecima operatione vides. Repetiui toties ex-

emplum, non quod neceſſe ſit; ſed vt quilibet facile proprio Marte diuiſionem, quæ aliquid difficultatis habere videtur, poſsit diſcere.

Quartum exemplum. Sint 1531100 per 305 diuidenda. Collocato exemplo, vt vides in prima operatione. Dic 3 in 15 continentur quinquies: poſitis ergo 5 poſt lunulam, deletiſq; delendis, dic quinquies 5 faciunt 25 (nam cyphra non curatur) ſubtractis ergo 25 ex 31 reſtát 6, vt in ſec. oper. vides. Iam quia pro moto diuiſore nihil eſt ſupra diuiſorē 3: poſita ergo ad quotum figura 0, promoue diuiſorē denuo vt in 3. oper. cernis, & dic 3 in 6 continentur bis, reſtat nihil: poſitis ergo 2 ad quotū, dic bis 5 faciunt 10; quibus ex 10 ſubtractis, reſtat nihil.

Operatio 1.

1531100 (5
305

Operatio 2.

6
1531100 (50
3055
30

3. Operat.

7
2 X 2
8

6
1531100 (5020
305505
3

Et quia in diuidendo nihil ſupereſt; eſtq; diuiſor ſemel adhuc promouendus, pone 0 ad quotū, & erit diuiſio perfecta.

Etiam hoc animaduertendum eſt, cum verſus dextram diuiſor habet cyphras, eas ad finē numeri diuidendi promouendas, & cū reliquis diuiſoris figuris dūtaxat operandū, vt in hoc quinto exēplo, in quo 850670 per 6400 diuidenda proponuntur, eſt videre.

1
3
228
850670 (13
6444 00
6

Exa-

EXAMEN.

Abiice tam ex quoto, quam ex diuiſore 9, quoties potes, reſidua in ſuperiore, & in inferiore crucis parte poſita, duc in ſe; atque ex eo, quod inde fit, & reſiduo diuiſionis, ſi quod fuerit rurſus abiice 9, quoties potes: reſiduo huic ſi æquale fuerit reſiduum numeri diuidendi, probabile eſt operationem bonam eſſe. Si æquale non fuerit, certum eſt erratum eſſe. Exempli cauſa, reiectis ex quotis 9, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo, 0; in ſecundo 6; in tertio, 0; in quarto 7. quæ ponuntur in ſuprema parte crucis. Reiectis quoque 9 ex diuiſoribus, quoties fieri poteſt, reſtant in primo exemplo 2; in ſecundo 4; in tertio 8; in quarto 8, quæ ponuntur in inferiore parte crucis. Ductis iam reſiduis illis in ſe, producuntur in primo exemplo, 0; in ſecundo 24; in tertio, 0; in quarto 56. His ſi addantur reſidua diuiſionis, fient in exemplo ſecundo (nam in primo, & quarto nullum eſt reſiduum) 25: in tertio 8. Reiectis hinc rurſus 9, quoties fieri poteſt, reſtant, in primo exemplo, 0, in ſecundo 7; in tertio 8, in quarto 2; quæ ad alterum latus crucis ponuntur. Quod ſi reiectis 9, quoties fieri poteſt, ex numeris diuidendis, ſuperfuerint, in exemplo primo, 0; in ſecundo 7; in tertio 8; in quarto 2, probabile eſt operationes probas eſſe.

Certiſsima probatio eſt, quæ fit per Multiplicationem, hoc modo. Ducatur diuiſor in quotum, producto addatur reſiduum diuiſionis, ſi quod fuerit; nam ſi hoc vltimum productum, æquale fuerit numero diuidendo, recte ſe habet operatio. Eodem modo per diuiſionem multiplicatio examinatur. Si enim productum

ctum diuidatur per alterutrum multiplicantem, atque in quoto alter multiplicans prouenerit, rectè ſe habet operatio.

Capvt II.

DE FRACTORVM NVmerorum elementis.

Numerus fractus eſt pars, vel partes alicuius integri, & ſcribitur hoc modo; $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{7}{12}$, $\frac{81}{120}$; primus ſignificat dimidium; ſecundus duas tertias partes alicuius integri, hoc eſt, inferior ſignificat totum aliquod diuiſum eſſe in tres partes; at ſuperior ex tribus illis, duas duntaxat acceptas eſſe innuit. Tertius ſignificat tres quartas partes. Quartus quinq; ſeptimas. Quintus ſeptem duodecimas. Sextus octoginta vnam centeſimas vigeſimas. Inferior dicitur Denominator, quod nominet, in quot partes totum ſit diuiſum: Superior Numerator, quod numeret partes acceptas ex partibus, in quas totum diuiſum eſt. Exempli cauſa, ſi aureus eſſet diuiſus in 60 partes, & ego ex illis accepiſſem 27, haberem $\frac{27}{60}$, nempe viginti ſeptem ſexageſimas, hoc eſt, 27 cruciferos. Sed iam ad præcepta pergimus.

Articvlvs I.

FRACTIONES AD MInores terminos reducere.

Reducere fractionem ad minores terminos, eſt efficere

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

tere, vt tam numerator, quam denominator minores quidem fiant, eandem tamen, quam prius, proportionem inter ſe conſeruent: ita ex hac fractione $\frac{6}{12}$, poteſt & hæc fieri $\frac{3}{6}$, & hæc $\frac{1}{2}$, ſiquidem in omnibus tribus denominator eſt duplus numeratoris, omnesque dimidium ſignificant.

Reducturus ergo magnam aliquam fractionem ad minores terminos, ſubtrahe tandiu minorem terminū ex maiore, donec ſubtrahendus, & reſiduus, æquales fiant. Aut diuide tandiu maiorē per minorem, donec nihil remaneat; tunc enim vterque Denominator, & Numerator diuidendus erit per reſiduū illud, aut vltimum diuiſorem. Sit hæc fractio $\frac{63}{91}$ ad minores terminos reducenda: ſubtrahe 63 ex 91, reſtant 28. Deinde ſubtrahe 28 ex 63, reſtant 35: rurſus ſubtrahe 28 ex 35, ſuperſunt 7. Item ſubtrahe 7 ex 28, reſtant 21; iterumque ſubtrahe 7 ex 21, reſtant 14; ac deniq; ſubtrahe 7 ex 14, ſuperſunt 7, quæ eſt vtriuſq; numeratoris & denominatoris menſura maxima, per quam ſi tam 63, quam 91, diuiſeris, prouenient 9, & 13; erit igitur hæc fractio $\frac{63}{91}$, ad hanc $\frac{9}{13}$ reducta. Vel diuide 91 per 63, reſtant 28; deinde diuide 63 per 28, reſtant 7: deniq; diuide 28 per 7, reſtat nihil: erit igitur vltimus hic diuiſor 7, numerus per quem tam 91, quam 63 diuidendus eſt. Quod ſi in hac mutua ſubtractione, nunquā ſubtrahendus reſiduo æqualis fiat: & in mutua illa diuiſione, ſemper aliquid ſuperſit, donec ad vnitatem perueniatur, nō poterit illa fractio ad minores ter inos reduci, vt videre eſt in hac fractione $\frac{17}{24}$, quæ ad minores terminos reduci nequit. Dicitur numerus, per quem vterque, tam Numerator, quam Denominator diuiditur, cōmunis vtriuſque menſura.

Nu-

Numeri verò, qui eiuſmodi menſuram habent, dicuntur numeri inter ſe compoſiti; qui non habent, dicuntur inter ſe primi, vt videre licet in ſeptimo Elementorum Euclidis.

Articvlvs II.

DVAS AVT PLVRES fractiones, ad eandem denominationem reducere.

Reducere fractiones ad eandem denominationem, eſt efficere, vt eundem Denominatorem acquirant. Duas ergo fractiones ad eandem denominationem reducturus, multiplica inter ſe denominatores, vt habeatur communis denominator. Pro numeratoribus vero nouis, duc denominatores in numeratores per crucem. Exemplum. Sint hæ duæ fractiones $\frac{3}{4}$ X $\frac{5}{6}$, ad eandem denominationem reducendæ. Duc denominatores in ſe, & fient 24, communis Denominator. Pro Numeratoribus duc per crucem, $\frac{3}{4}$ X $\frac{5}{6}$ | $\frac{18}{24}$, $\frac{20}{24}$, pro primo 3 in 6; pro ſecundo 5 in 4, vt fiant 18 & 20, vt in exemplo apparet. Valent igitur idem tam $\frac{3}{4}$, $\frac{18}{24}$, quam $\frac{5}{6}$, $\frac{20}{24}$. Reducturus tres, quatuor, aut plures fractiones ad eandem denominationem, duc primæ Denominatorem in Denominatorem ſecundæ; productum in Denominatorem tertiæ; & hoc productum in Denominatorem quartæ &c. Et erit poſtremum productum, Denominator cõmunis. Pro Numeratoribus nouis, duc numeratores reducendos in denominatorẽ iam inuentum; productũ diuide per Denominatores reducẽdos

& e-

& erũt quoti numeratores noui. Exemplũ. Sint hæ quatuor fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ad eandem denominationem reducendæ. Duc Denominatores in ſe, hoc eſt, 2 in 3, & fient 6; hoc productum in 4, fientque 24, hoc in 5, & fient 120, communis Denominator. Pro primo nouo Numeratore duc 1 in 120, productum diuide per 2 & prouenient 60. Pro ſecundo, duc 2 in 120, productum diuide per 3, & inuenies 80. Pro tertio, duc 3 in 120, productum diuide per 4 & prodibunt 90. Pro quarto duc 4 in 120, productum diuide per 5 & reperies 96, vt in his exemplis apparet $\frac{60}{120}$ $\frac{80}{120}$, $\frac{90}{120}$, $\frac{96}{120}$.

Sed obſeruandum, denominatorem communem fieri poſſe minorem; ſi productũ præcedentium denominatorum, & denominator ſequentis fractionis, habeant communem menſuram. Vt in his $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, habent productum duorũ priorum denominatorum, quod eſt 6, & denominator ſequentis fractionis, qui eſt 4, hanc menſuram 2; per quam ſi tam 6. quam 4, diuiſeris, prouenient 3 & 2. Si rurſus, aut 6 in quotũ 2 aut 4 in quotum 3 duxeris, producetur trium priorum fractionum communis denominator 12. Hic in denominatorem quartæ ductus, producit communem omnium Denominatorem 60. Si iam porrò per regulam traditam operatus fueris, inuenies has fractiones $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ ad has $\frac{30}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{45}{60}$, $\frac{48}{60}$ reductas.

Item ſi hæ fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{18}$ ad eandem denominationem ſint reducendæ, ita agito. Denominatores primæ & ſecundæ fractionis, nempe 4 & 12, habent communem menſuram 4: ſi ergo tam 4, quam 12, per

4 di-

4 diuiſoris, prouenient 1 & 3. Rurſus ſiue 12 in 1, ſiue 4 in 3 duxeris, reperies 12. Iam quia 12, denominator primæ & ſecundæ fractionis, & 18 denominator tertiæ, habent communem menſuram 6, ſi per eam tam 12, quam 18 diuidas, prouenient 2 & 3; quare ſi vel 18 in 2, vel 12 in 3 duxeris, prouenient 36, denominator communis $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$. Numeratores nouos facilè, per ſupra dicta, inuenies.

ARTICVLVS III.

DE ADDITIONE ET *ſubtractione fractorum.*

Nihil eſt facilius, quam duas, aut plures fractiones inuicem addere, aut minorem ex maiore ſubducere. Nam ſi duæ, aut plures, eundem habeant denominatorem; adduntur inuicem Numeratores, & ſupponitur illis communis denominator. Vt ſi hæ fractiones $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{6}{7}$ eundem habentes denominatorem addendæ ſint, adduntur 3, 5, 6, & conflantur 14, quibus ſupponitur cõmuuis denominator 7, hoc modo $\frac{14}{7}$. Si iam 14 per 7 diuiſeris, prouenient 2, ſumma dictarum fractionum.

Si habeant diuerſos denominatores, reducuntur prius ad eandem denominationem; ac deinde, vt prius, numeratores inuicem adduntur. Sint hæ fractiones $\frac{3}{4}$, $\frac{11}{12}$, $\frac{17}{18}$ addendæ; reductæ faciunt has $\frac{27}{36}$, $\frac{33}{36}$, $\frac{34}{36}$; ſumma numeratorum eſt 94, qua per 36 diuiſa, prouenit $2\frac{22}{36}$, ſiue $2\frac{11}{18}$, in minimis terminis.

Hæ verò $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{20}{60}$, $\frac{15}{60}$, $\frac{12}{60}$; ſumma numeratorum eſt

eſt 47; ergo ſumma omnium $\frac{47}{60}$. Eodem modo, ſi fractio minor ex maiore ſit ſubtrahenda, agendum eſt. Et ſi quidem eundem habeant denominatorem, ſubtrahatur minor numerator ex maiore, reſiduo ſupponatur communis denominator. Vt ſi hæc fractio $\frac{2}{7}$ ex hac $\frac{5}{7}$, ſit ſubtrahenda ſubtrahantur 2 ex 5, reſtant 3, quibus ſi ſupponantur 7, fiet reſidua hæc fractio $\frac{3}{7}$.

Si non habeant eundem denominatorem, reducantur ad eundẽ; deinde ſubtrahatur minor numerator ex maiore, reſiduo ſupponatur communis denominator. Vt ſi hæc $\frac{5}{12}$ ex hac $\frac{17}{18}$, ſit ſubtrahenda, reductæ ad eandem denominationem, faciunt $\frac{90}{216}$, $\frac{204}{216}$, in minimis terminis $\frac{15}{36}$, $\frac{34}{36}$; & 15 ſubtracta ex 34, relinquunt 19, quibus ſi ſupponatur communis denominator 36, fiet reliqua hæc fractio $\frac{19}{36}$.

Contingit interdum, vt maior fractio ex minore ſit ſubtrahenda, quando nimirum fractis integra adhæret. Exempli cauſa, ſint 12$\frac{5}{6}$ ex 24$\frac{2}{7}$ ſubtrahenda, quia fractio hæc $\frac{5}{6}$ maior eſt, quam hæc $\frac{2}{7}$; ſiquidem 7 in 5 ducta plus faciunt, quam 6 in 2 (ſemper autem illa fractio maior eſt, cuius numerator in alterius denominatorem ductus, plus facit, quam alterius Numerator ductus in denominatorem ipſius) ſi inquam 12$\frac{5}{6}$ ex 24$\frac{2}{7}$ ſubtrahenda proponantur, frangatur vnum integrum, hoc eſt, addantur ad Numeratorem fractionis $\frac{2}{7}$ ſeptem, & tollatur vnum ex integris, hoc modo 23$\frac{9}{7}$. Iam ſi ſubtrahantur 12 ex 23; & $\frac{5}{6}$ ex $\frac{9}{7}$, reſtabunt 11$\frac{19}{42}$: Nam $\frac{5}{6}$, $\frac{9}{7}$ ad eandem denominationem reductæ, faciunt $\frac{35}{42}$, $\frac{54}{42}$, & 35 ex 54 ſubtracta, relinquunt $\frac{19}{42}$: ergo ſi 12$\frac{5}{6}$ ex 24$\frac{2}{7}$ ſubtrahantur, reſtant 11$\frac{19}{42}$.

ARTICVLVS IIII.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione fractorum.

Multiplicatio, & diuiſio fractorum faciles ſunt: nam ſi in Multiplicatione, tam Numeratores, quam denominatores in ſe multiplicētur, perfecta erit multiplicatio. Sit hæc fractio $\frac{7}{12}$ in hanc $\frac{5}{8}$ multiplicanda; duco tam ſuperiores 7, 5, quā inferiores 12, 8 in ſe, & produco $\frac{35}{96}$.

Si vna per alteram ſit diuidenda, inuertendus eſt diuiſor, & poſtea vt in multiplicatione operandum. Sit hæc $\frac{11}{12}$ per hanc $\frac{4}{7}$ diuidenda. Inuerto diuiſorem ſic $\frac{7}{4}$; quo facto, duco tam 11 in 7, quam 12 in 4, & produco hanc fractionem $\frac{77}{48}$; ſiue (facta diuiſione) hanc $1\frac{29}{48}$, ſemper enim, quando ſuperior maior eſt inferiore, diuiſio fieri poteſt, licet non ſemper ſit neceſſe; imo interdum commodius eſt, ſi non fiat.

Quod ſi, vt ſæpe contingit, fractis adhæreant integra, frangenda prius ſunt integra, hoc eſt, multiplicanda per denominatorem, & productum Numeratori addendū. Sint hæc $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ multiplicāda: duco 12 in 7, & produco 84 quæ addo Numeratori, & cōflo $\frac{89}{7}$. ductis iam tam 89 in 4, quā 7 in 9, produco $\frac{356}{63}$, &, facta diuiſione, $5\frac{41}{63}$. Igitur ſi multiplicentur $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$, producūtur $5\frac{41}{63}$.

Si ſint $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidenda, inuerto diuiſorem ſic $\frac{9}{4}$, & diuidendum, vt prius, reſoluo, ſtabuntque ſic numeri $\frac{89}{7}$ $\frac{9}{4}$; ductis igitur tam ſuperioribus, quam inferioribus in ſe, producuntur $\frac{801}{28}$, ſiue, facta diuiſione, $28\frac{17}{28}$: ſi ergo $12\frac{5}{7}$ per $\frac{4}{9}$ diuidantur, proueniunt $28\frac{17}{28}$. Cur autem cū integer per fractū multiplicatur, minus integro;

cum

cum verò integer per fractum diuiditur plus integro proueniat, dicetur. lib. 1. cap. 4. art. 6. Annot. 2.

Si vtriq; fractioni adhæreant integra, vtriuſq; integra reſoluta, numeratoribus addi debent, ac deinde iuxta traditã regulam agendum. Sint enim $7\frac{2}{3}$ per $3\frac{3}{4}$ multiplicanda; reſoluta ſic habent $\frac{23}{3}$, $\frac{15}{4}$; ductis tam ſuperioribus, quã inferioribus in ſe, ſic $\frac{345}{12}$; & facta diuiſione ſic $28\frac{9}{12}$; ſiue ſic $28\frac{3}{4}$.

Si verò $7\frac{2}{3}$ ſint per $3\frac{3}{4}$ diuidenda, inuerto diuiſorem, ſtabitq; ſic exemplum $\frac{23}{3}$, $\frac{4}{15}$, & facta multiplicatione ſic $\frac{92}{45}$, & diuiſione ſic $2\frac{2}{45}$.

Deniq; ſi integer per fractum ſit multiplicandus, ſuppono integro vnitatem. Vt ſi velim 12 per $\frac{3}{5}$ multiplicare, ſtabit ſic exemplum $\frac{12}{1}$, $\frac{3}{5}$; facta multiplicatione ſic $\frac{36}{5}$; & diuiſione ſic $7\frac{1}{5}$.

Eodem modo, ſi velim 12 per $\frac{3}{5}$ diuidere, ſuppono integro vnitatẽ, & inuerto diuiſorem hoc modo $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{1}$; facta igitur multiplicatione producuntur $\frac{60}{3}$, & diuiſione, 20. Ergo ſi 12 per $\frac{3}{5}$ diuidantur, proueniunt 20.

Articvlvs V.

DE FRACTIONIBVS *fractorum numerorum.*

Occurrunt interdum fractorum fractiones, quod quando fit, duc tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, & habebis illorum valorẽ. Vt ſi ſit huius fractionis $\frac{5}{7}$, hæc fractio $\frac{3}{5}$ reduces eas ad hanc $\frac{15}{35}$, ſiue ad hanc $\frac{3}{7}$. Si huius $\frac{21}{60}$, hæc $\frac{3}{7}$, reduces eas ad hanc $\frac{63}{420}$, ſiue ad $\frac{9}{60}$, ſiue ad $\frac{3}{20}$ nam ſi $\frac{21}{60}$ ponatur viginti vna ſexageſimę vnius floreni, erunt $\frac{21}{60}$ viginti vnus cruciferi; ac proinde tres ſeptimæ

viginti vnius cruciferorum, erunt 9 cruciferi, ſiue tres triarij.

Capvt III.

DE REGVLIS, ET earum vſu.

Multi multas tradunt regulas, ſuo quilibet inſtituto accommodatas. Ego quatuor, ſaluo aliorum iudicio, ſufficere iudico. Auream nimirum illam proportionum regulam: Regulas item Conſortij, Alligationis, & poſitionum.

Articvlvs I.

DE REGVLA PROportionum.

Vt hæc regula melius intelligatur, aliquid de proportionibus dicendum eſt. Scire ergo oportet, tunc quatuor numeros apud Arithmeticos dici proportionales, ſi primo, & tertio in quemcumq; numerum multiplicato; Item ſecundo, & quarto, in eundem, aut alium quemcumque, ſemper quando productum primi maius eſt producto ſecundi, etiam productum tertij maius ſit producto quarti. Et ſi productum primi ſit æquale producto ſecundi, etiam productum tertij æquale ſit producto quarti. Ac denique ſi productum primi minus ſit producto ſecũdi, etiam productũ tertij minus ſit producto quarti. Si inquam hoc ſemper contingat, tunc quatuor illi numeri dicuntur eſſe proportionales: ſi verò non ſemper contingat, proportionales non dicun-

cuntur. Item per 16, ſexti, & 19 ſept. tunc demonſtrantur quatuor numeri eſſe proportionales, quando genitus ex primo, & quarto, æqualis eſt genito ex ſecundo, & tertio. Vnde conſtat in Multiplicatione productum, duos multiplicantes, & vnitatem, eſſe proportionales: ſi nimirum productum, & vnitas extremas, multiplicantes medias ſedes occupent. Eodem modo in diuiſione proportionales erunt. Numerus diuidendus, Diuiſor, quotus, & vnitas; ſi diuidendus, & vnitas extremas, Diuiſor, & quotus medias ſedes occupent. Sed cum de proportione plura dicenda ſint cap. 4. regulam ipſam aggredimur.

Regula proportionum, etſi vnica eſt; quadrimembris tamen, facilitatis gratia, eſto. Directa ſimplex, Reciproca ſimplex, Directa compoſita, Reciproca compoſita. Dicitur hæc regula, etiam regula trium, quod ex tribus numeris notis, quartus ignotus per illam eruatur. Dicitur quoque, propter præſtantiam, qua reliquas ſuperat, regula aurea.

DE REGVLA PROPORtionum directa ſimplici.

In hac regula ſemper ſunt tres numeri cogniti, quorum duo homogenei inter ſe ſunt, tertius homogeneus numero inueniendo. In collocatione primo loco ponitur ille homogeneus, qui quæſtionem annexam non habet, ſeu cuius valor iam cognitus eſt. Reliqui duo noti, ponuntur ſecundo & tertio loco, ſecundo quidem homogeneus inueniendo, tertio homogeneus primo loco ponendo. Quod etſi in directa opus non eſt,

in reciproca tamen neceſſarium prorſus eſt. Facta collocatione ducitur ſecundus in tertium; productum diuiditur per primum, & prouenit quæſitum.

Annotatio.

Vtimur in exemplis moneta in Romano imperio vſitatiore, nimirum aureis, triarijs, cruciferis, & obolis. Aureus habet 20 triarios, 60 cruciferos, 420 obolos. Triarius habet 3 cruciferos, 21 obolos. Crucifer habet 7 obolos.

Exempla.

Exemplum primum. 20 aureis emo 16 vlnas panni, quot vlnas emo 45 aureis? Hic vides homogeneos eſſe 20, & 45 aureos, & quæſtionem annexam habere 45 aureos. Primò ergo loco pono 20. au. ſecundo, 16 vlnas, Tertio 45 aureos, hoc modo. 20 au. | 16 vl. | 45 au. Facta operatione iuxta regulam, reperio 36 vlnas. Nam 16 in 45 ducta gignũt 720, quę per 20 diuiſa, reddũt 36.

Secundum exemplum. Quidam dat pro menſa vno die 9 cruciferos, quæro quid vno anno dare debeat? Sciendum hic eſt, vnum annum habere dies 365. ſtabit ergo ſic exemplum 1 D. | 9 cruc. | 365 D. Facta operatione reperies cruciferos 3285, quibus diuiſis per 60 (quod vnus aureus 60 cruciferos habere ponatur) reperies aureos 54, cruciferos 45. Atque tantum vno anno dare debet.

Tertium exemplum. Vna libra carnis venditur 3 cruciferis, 4 obolis, quanti venduntur 100 libræ? Reſolue cruciferos in obolos, hoc eſt, duc in 7; producto adde 4. fientque 25 oboli. Quo facto ſic habet exemplum. 1 lib. | 25 ob. | 100 lib. Operatione facta reperies 2500 obolos, quibus per 420 diuiſis (quod vnus aureus

reus 420 obolos habere ponatur) proueniunt aurei 5, reſtant 400 oboli. Quibus per 7 diuiſis, proueniunt 57 cruciferi, reſtat vnus obolus. Ergo ſi 1. libra carnis vendatur 3 cruciferis, 4 obolis, vendentur 100 libræ, aureis 5, cruferis 57, obolo vno.

Quartum. 10 aureis, 25 cruciferis, emo 2 vrnas & 32 menſuras vini : quanti emo 20 vrnas? Quia in hac quæſtione homogeneæ res ſunt vrnæ, & menſuræ, & quæſtionem annexam habent 20 vrnæ, debent primo loco poni 2 vrnæ, & 32 menſuræ, adeoque quæſtio in hunc modum formanda. Vrnæ 2, & 32 menſuræ dant 10 aureos, 25 cruciferos; quid dant 20 vrnæ? Reſolue vrnas in menſuras, aureos in cruciferos (habet vna vrna menſuras 64, vnus aureus 60 cruciferos) & ſtabit ſic exemplum. 160 Menſ. | 625 cruc. | 1280 Menſ. | Facta operatione reperies 5000 cruciferos, quibus per 60 diuiſis, proueniunt 83 aurei, reſtant 20 cruciferi. Ergo ſi 2 vrnæ, 32 menſuræ emuntur 10 aureis, 25 cruciferis, ementur 20 vrnæ, 83 aureis, 20 cruciferis.

Quintum. Quidam emit 2 au. $18\frac{3}{4}$ crucif. $1\frac{1}{2}$ vlnas panni, quot emet vlnas, 89 au. 40 cruciferis? Duo aurei habent 120 cruciferos, quibus ſi addas $18\frac{3}{4}$, cruciferos habebis $138\frac{3}{4}$. aurei 98 habent 5880 crucif. quibus ſi addas 40 crucif. conflabis 5920. Exemplum ergo, facta reſolutione fractorum, integro vnitate ſuppoſita, & termino primo, qui diuiſor eſt, inuerſo, ſic ſtat $\frac{4}{555}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5920}{1}$. Ductis 4 in 3 produco 12; his in 5920 progigno 71040, qui eſt numerus diuidendus. At ducto 1 in 2 creo 2, his in 555 efficio 1110, qui eſt diuiſor. Diuiſis ergo 71040 per 1110, proueniunt 64 vlnæ.

 Sextum.

Sextum. Quidam mercator emit Monachij 400 medimnos ſalis, quemlibet vno aureo, 54 cruciferis. Hos Noribergam vexit; atque Monachio Ingolſtadium vſque pro vectura, & vectigalibus expendit pro quolibet medimno 5 cruciferos: Ingolſtadij vendidit 180 medimnos, quemlibet 2 aureis, reliquos 220 Noribergam vexit, deditque pro vectura, & vectigalibus pro quolibet medimno 4 cruciferos; quærit ſi 30 aureos lucrari velit, quanti quemlibet medimnum Noribergæ vendere debeat? Dico primo vnus medimus dat 1. au. 54. crucif. ſiue 114 cruciferos; quid dant 400 medimni? Et reperio cruciferos 45600. Quia verò pro quolibet medimno expendit 5 cruciferos, ſi duxero 5 in 400, reperio crucif. 2000. Iterum, quia Ingolſtadio Noribergam pro quolibet 220 medimnorum expendit 4 cruciferos, duco 220 in 4, & produco 880 cruciferos. Summa omnium eſt aureorum 808. Porrò quia 180 medimnos vendidit 360 au. quemlibet medimnum 2 aureis, ſi 360 aureos ex 808 ſubtraxero, relinquentur 448 aurei: ſed quia 30 aureos vult lucrari, addo illis 30, vt fiant 478. Atque hos aureos diuido per 220 medimnos Noribergam vectos, inuenioque quemlibet 2 aureis, $10\frac{4}{11}$, cruciferis vendendũ eſſe. Nam ſi diuidantur 478 per 220, proueniunt 2 au. reſtant 38; quibus in 60 ductis, productoque per 220 diuiſo, proueniunt $10\frac{4}{11}$ cruciferi.

Septimum. Mercator emit 8 vlnas panni 10 au. vult 10 vlnas vendere 15 aureis, quærit quot vlnæ ſibi emendæ ſint, vt lucretur 100 aureos? Dico primo. 8 vlnæ dant 10 au. quid dant 10 vlnæ? & reperio $12\frac{1}{2}$ au. Ergo ſi 8 vlnas emit 10 aureis, emet 10 vlnas $12\frac{1}{2}$ aureis.

aureis. Verum cum 10 vlnas vendere velit 15. aureis, lucratur 10 vlnis $2\frac{1}{2}$ aureos, (ſubtracti enim $12\frac{1}{2}$ ex 15 relinquunt $2\frac{1}{2}$) Dico iterum. $2\frac{1}{2}$ aurei, dant 10 vlnas, quot dant 100 aurei? & reperio 400 vlnas: atque tot vlnas emere debet, vt 100 aureos lucretur.

Octauum. Eſt ciſterna duas habens eiuſdem magnitudinis fiſtulas, per quarum ſuperiorem impletur 6, per inferiorem euacuatur 8 horis. Quæro ſi vtraq; continuo fluat, quanto tempore ciſterna impleatur? Quia 6 horis tota impletur, implebitur vna hora $\frac{1}{6}$ ciſternæ. Et quia 8 horis tota euacuatur, euacuabitur vna hora $\frac{1}{8}$ ciſternæ. Si ergo ſubtraham $\frac{1}{8}$ ex $\frac{1}{6}$, reſtabit pars ciſternæ, quæ vna hora impletur, nimirum $\frac{1}{24}$. Quare ſi vna hora impletur $\frac{1}{24}$ ciſternæ, implebitur tota horis 24.

Nonum. Eſt ciſterna tres habens fiſtulas æqualiter, & continuò fluentes, per primam impletur 4, per ſecundam 6, per tertiam 12 horis. Quæro ſi omnes ſimul fluerent, quanto tempore ciſterna impleretur? Prima vna hora implet $\frac{1}{4}$. Secunda $\frac{1}{6}$. Tertia $\frac{1}{12}$ ciſternæ: ergo omnes ſimul vna hora implent $\frac{1}{2}$ ciſternæ. Si dicam. $\frac{1}{2}$ ciſternæ dat vnam horam, quid dat vna ciſterna? reperio 2 horas. Atque tanto tempore, ſi omnes fiſtulæ fluerent, ciſterna impleretur.

Decimum. Petrus dat Paulo 25 vlnas panni nigri pro 45 vlnis panni rubri, cuius quælibet vlna conſtat 35 cruciferis, quæro quid valeat vna vlna panni nigri Petri? Quia vna vlna panni rubri conſtat 35 cruciferis, conſtabunt omnes ſimul 1575 crucif. Sed & tantum valent omnes panni nigri: ergo vna valebit cruciferis 63.

 Vnde

Vndecimum. Tres opifices abſoluunt aliquod opus. Primus ſolus laborans abſoluit illud 20; alter 30; ſi tertius accederet, abſoluerent id omnes ſimul 10 diebus. Quæro quanto tempore tertius ſolus abſolueret? Primus vno die abſoluit $\frac{1}{20}$; ſecundus $\frac{1}{30}$; vterq; ſimul $\frac{1}{12}$ totius operis: qua ſubtracta ex $\frac{1}{10}$ portione, quam omnes ſimul vno die abſoluunt, reſtat $\frac{1}{60}$, portio tertij. Ergo ſi tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus. Nam ſi dicam, primus 20 diebus abſoluit totum opus, quid vno die? Reperio $\frac{1}{20}$. Eodem modo ſecundum vno die reperio abſoluere $\frac{1}{30}$. Vterque ergo vno die abſoluit $\frac{1}{12}$ operis. Et cum omnes id abſoluant 10 diebus, abſoluent vno die $\frac{1}{10}$. Subtracta ergo $\frac{1}{12}$ ex $\frac{1}{10}$, reſtat $\frac{1}{60}$, id quod tertius vno die abſoluit. Si ergo tertius vno die abſoluit $\frac{1}{60}$ operis, abſoluet totum 60 diebus.

Aliter. Quoniam primus abſoluit opus 20 diebus, abſoluet 10 diebus dimidium operis, hoc eſt, $\frac{1}{2}$. Alter, quia 30 diebus totum abſoluit, abſoluet 10 diebus $\frac{1}{3}$ operis: vterque ergo 10 diebus abſoluet $\frac{5}{6}$ operis: Ergo tertius 10 diebus abſoluet $\frac{1}{6}$ operis. Ideoque totum 60 diebus.

Duodecimum. Duo tabellarij è diuerſis ciuitatibus 240 milliaribus diſtantibus eodem die exeunt. Primus quolibet die conficit 7? Alter 5 milliaria: quæro quoto die conuenturi ſint? Vterque ſimul conficiunt 12 milliaria. Si ergo dicam 12 milliaria dant 1 diem, quid dant 240 milliaria? Reperio 20 dies: conuenient ergo die vigeſimo.

Decimum tertium. Eſt moletrina tres habens molas. Prima 12 horis molit 10 modios, altera 10 horis

ris

ris 8, tertia 6 horis, itidem 8 modios: quæro quot horis omnes molæ 30 modios molere poſſint? Prima vna hora molit $\frac{5}{6}$; altera $\frac{4}{5}$: tertia $\frac{4}{3}$: ergo omnes $2\frac{67}{90}$. Iam dico $2\frac{67}{90}$ modij requirunt 1 H, quid requirunt 30 modij? & inuenio $10\frac{10}{98}$ horas.

Decimum quartum. Eſt turris, cuius $\frac{1}{4}$ ſub terra latet, $\frac{1}{3}$ aquis immerſa eſt, ſupra aquam eminent pedes 150. Quæro quot pedum ſit turris, quot item terra, & aqua occultentur? $\frac{1}{4}$ & $\frac{1}{3}$ faciunt $\frac{7}{12}$: ergo $\frac{7}{12}$ in terra & aqua ſunt, $\frac{5}{12}$ ſupra aquam eminent. Si igitur (abiectis denominatoribus) dicam. 5 | 150 | 7, reperio 210, qui cum 150 faciunt 360 pedes, cuius $\frac{1}{4}$ ſunt 90: $\frac{1}{3}$ ſunt 120: ergo 90 pedes in terra ſunt, 120 aquis immerguntur, & tota turris eſt 360 pedum.

Decimum quintum. Quidam mercator emit 100 vlnas panni 80 aureis, vult autem 230 vlnis lucrari 40 aureos. Quæro quanti vnam vlnam vendere debeat? Dico. 100 vl. | 80 au. | 230 vl. & reperio 184 au. Addo 40 au. vt fiant 224 aurei, dicoque 230 vl. | 224 au. | 1 vl. & inuenio vnam vlnam vendendam eſſe $58\frac{10}{23}$ cruciferis. Reſolui enim 224 aureos in cruciferos, & reperi 13440, quibus per 23. diuiſis, prouenerunt $28\frac{10}{23}$ cruciferi.

Decimum ſextum. Quidam vult mutuos accipere 10 aureos, ea lege, vt ſibi æquali numero dentur triarij, cruciferi & oboli. Quæro quot accipere debeat? Decē aurei faciunt triarios 200, cruciferos 600, obolos 4200: ergo vnus triarius eſt $\frac{1}{200}$, vnus crucifer $\frac{1}{600}$, vnus obolus $\frac{1}{4200}$ decē aureorū: omnes ergo ſunt $\frac{29}{4200}$

$\frac{22}{4200}$ decem aureorum. Si igitur 4200 per 29 diuidantur, prouenient $144\frac{24}{29}$; atque tot triarios; tot cruciferos, & tot obolos accipere debet. Faciunt enim $144\frac{24}{29}$ cruciferi, $48\frac{8}{29}$ triarios; & $144\frac{24}{29}$ oboli faciunt $6\frac{76}{29}$ triarios: ſed $144\frac{24}{29}$, $48\frac{8}{29}$, & $6\frac{26}{29}$ faciunt 200 triarios, hoc eſt, 10 aureos.

DE REGVLA RECIproca ſimplici.

Regula reciproca ſimplex eſt, quando termini homogenei ſeu primus, & tertius permutantur: quando autem permutandi ſint, ex ipſa quæſtione iudicandum eſt. Permutatione facta operatio fit, vt in ſimplici directa.

Primum exemplum. Cum modius tritici venditur 3 aureis, fit panis piſtorius 12 vnciarum: quæro quot vnciarum eſſe debeat, ſi modius vendatur 4 aureis? Sic quidem ſtat exemplum. 3 au. | 12 vnc. | 4 au. Sed permutatis terminis homogeneis notis ſic. 4 au. | 12 unc. | 3 au. Facta operatione proueniunt vnciæ 9. Quod autem termini ſint permutandi, ratio hæc eſt. Quia ſi non permutarentur, prouenirent 16 vnciæ, quod fieri non poteſt: ſiquidem certum eſt, quo carius frumentum venditur, hoc minorem fieri debere panem. Ergo ſi panis, cum modius frumenti venditur 3 aureis, ſit vnciarum 12, debet neceſſario, cum venditur 4 aureis, pauciorum eſſe vnciarum: quod vt fiat regula Reciproca vtendum eſt. Vnde fit, vt in collocatione permutetur termini homogenei, hoc modo. 4 au. | 12 vnc. | 3 au. vt proueniant 9 vnciæ.

Secun-

Secundum exemplum. Opifices 12 abſoluunt opus aliquod 10 diebus; quot diebus opus habent 30 opifices? Exemplũ reciprocè ſic habet. 30 op. | 20 D. | 12 op. operatione abſoluta reperiuntur dies 8. Quod autem termini ſint permutandi inde conſtat; quia 30 opifices citius ſe expediunt quam 20.

Tertium. Sex fiſtulæ ciſternam implent 18 horis, quot horis opus habent 4 fiſtulæ? Certum eſt quod pluribus, plures enim fiſtulæ citius ciſternam implent, quam pauciores. Idcirco reciprocè ſic ſtat exemplum 4 fiſt. | 18 H. | 6 fiſt. facta operatione, reperio 27 horas.

Quartum. Nuncius ſi quotidie 12 milliaria conficiat, peruenit Romam 11 diebus: quæro quot diebus eò peruenturus ſit, ſi quotidie conficiat milliaria 9? Certum eſt, quod quo pauciora milliaria conficit, hoc tardius Romam peruenturus ſit. Igitur exemplum reciprocè ſic habet. 9 Mil. | 11 D. | 12 Mil. operatione abſoluta reperio dies $14\frac{2}{3}$.

Quintum. Quando pannus latus eſt 9 palmos, opus habeo pro tunica $4\frac{1}{2}$ vlnis: quæro quando latus eſt 12 palmos, quot opus habeam vlnis? Certum eſt, quod paucioribus. Vt ergo pauciores inueniam, reciprocè pono exemplũ. 12 pal. | $4\frac{1}{2}$ vl. | 9 pal. facta operatione, inuenio $3\frac{3}{8}$ vlnas.

DE REGVLA COMPOSITA DIRECTA.

Directa compoſita plures quam tres terminos notos exigit, nimirum 5, 7, aut etiam plures. Reducuntur autem

autem plures illi termini ad tres, ſi aut cognati termini in ſe ſigillatim ducantur, aut regula proportionum inſtituatur. Sed rem exempla declarabunt.

Primum. 12 mercatores 1000 aureis lucrantur 800 aureos quæro quantum 18 lucrentur 1900? Hic noti numeri quinque ad tres reducendi ſunt, hoc eſt, cognati primus, & ſecundus; Item quartus, & quintus in ſe ducendi, obtinebuntq; producta locum primum, & tertiũ, hoc modo 12000 | 800 | 34200, facta operatione reperies aureos 2280, quos 18 mercatores, 1900 aureis lucrãtur. Poſſumus & eoſdẽ quinq; terminos ad tres per regulam proportionum reducere, ſi dicamus. 12 Merc. | 800 au. | 18 Merc. reperimus enim 1200: aut ſi dicamus 1000 | 800 | 1900, reperimus enim 1520. Vt quæſtio in his tribus terminis. 1000 | 1200 | 1900; aut in his. 12 | 1520 | 18, conſiſtat. Siquidem vtrobique per operationem eruitur hic numerus 2280.

Secundum. 20 plauſtra vini aduecta per 18 milliaria, conſumunt 100 aureos, quantum conſumunt 48 plauſtra, aduecta per 30 milliaria? Duc tam 20 in 18; quam 48 in 30, & ſtabit exemplum in his terminis 360 | 100 | 1440. Facta operatione prouenient 400 aurei, quot 48 plauſtra, per 30 milliaria aduecta, conſumunt.

Tertium. 6 Mercatores, 200 aureis, 8 menſibus lucrantur 80 aureos; quantum lucrantur 16 mercatores, 600 aureis, 20 menſibus? Duc tam pecunias, quam menſes in ſuos mercatores ſigillatim, hoc eſt, duc in ſe tam 6. 200. 8; quam 16. 600. 20, ſtabitq; exemplum in his terminis 9600 | 80 | 192000: facta operatione reperies 1600 aureos, quos 16 mercatores 600 aureis, 20 menſibus lucrantur.

Quar-

Quartum. $7\frac{1}{4}$ aurei, $3\frac{1}{2}$ diebus, lucrantur $19\frac{1}{2}$ aureos, quid lucrantur $23\frac{3}{4}$ aurei, $9\frac{1}{2}$ diebus? Ductis tam $7\frac{1}{4}$ in $3\frac{1}{2}$; quam $2{,}\frac{3}{4}$ in $9\frac{1}{2}$, proueniunt $\frac{203}{8}$, & $\frac{1805}{8}$, reſolutoque hoc numero $19\frac{1}{2}$, & diuiſore, qui eſt primus terminus, inuerſo, ſtabit ſic exemplũ $\frac{8}{203}$ | $\frac{39}{2}$ | $\frac{1805}{8}$: ductis igitur tam denominatoribus, quam numeratoribus in ſe, producuntur $\frac{563160}{3248}$, & facta diuiſione, aurei 172, reſtant 1256, quibus in 60 ductis (quod vnus aureus 60 cruciferos habeat) productoq; per 3248 diuiſo, proueniunt 23 cruciferi, reſtant 656, quibus rurſus in 7 ductis (quod vnus crucifer 7 habeat obolos) & producto per 3248 diuiſo proueniunt $1\frac{12}{29}$ oboli.

DE RECIPROCA Compoſita.

Reciproca compoſita pluribus etiam quam tribus terminis notis conſtat; qui autem termini tranſponendi ſint, tum ex dictis de Reciproca ſimplici conſtat, tum exempla docebunt.

Primum exemplum. Quatuor Sartores conficiunt 100 tunicas 24 diebus, quot diebus opus habent 12 ſartores pro 350 tunicis? Sic quidem habet exemplũ. 4 Sart. | 100 tu. | 24 D. | 12 Sart. | 350 tu. Sed quia 12 Sartores citius ſe expediunt, quam 4, permutandi ſunt ſartores, hoc modo 12 Sart. | 100 | 24 D. | 4 ſart. | 350 tu. Ductis ergo tam 12 in 100; quam 4 in 350, producũtur 1200, & 1400, ſtabitq; exemplum in tribus terminis hoc modo, 1200 | 24 D. | 1400, operatione abſoluta proueniunt dies 28.

Secun-

Secundum. Si 12 modij frumenti emantur 36 aureis, ſit panis piſtorius 8 vnciarum; quæro ſi 14 modij emantur 48 aureis, quot vnciarum panis eſſe debeat? Sic quidem ſtat exemplum. 12 Mod. | 36 au. | 8 vnc. | 14 Mod. | 48 au. Verum cum ductis 14 in 48, plus producatur, quam ductis 12 in 36, fit vt aurei ſint permutandi hoc modo, 12 Mod. | 48 au. | 8 vnc. | 14 Mod. | 36 au. Quo facto ductis tam 14 in 36; quam 12 in 48, producuntur 504, & 576. ſtabitque exemplum ad tres terminos reductum, hoc modo, 576 | 8 | 504; facta operatione prouenient 7 vnciæ. Eadem quæſtio ſic ſolui poteſt. Dico primo. 36 aurei dant 12 modios; quot dant 48 aurei? Et invenio 16 modios. Rurſus dico. 16 modij dant 8 vncias; quot dant 14? & reperio 7, vt prius.

Tertium exemplum. Quatuor equi vehunt plauſtrum vini 250 vrnarum per 20 milliaria 8 diebus: quæro quot diebus 6 equi vehant plauſtrum 350 vrnarum per 25 milliaria. Sic quidem ſtat exemplum 4 eq. | 250 vr. | 20 mill. | 8 D. | 6 eq. | 350 ur. | 25 mill. | ſed quia 6 equi citius ſe expediunt, quam 4, ſtabit euerſè hoc modo 6 eq. | 250 vr. | 20 mill. | 8 D. | 4 eq. | 350 vr. | 25 mill. | ductis iam tam 6.250, 20; quam 4. 350. 25 in ſe ſigillatim, producantur 30000, & 35000. Quare exemplum in tribus terminis ſic habet, 30000 | 8 | 35000, facta operatione reperies dies $9\frac{1}{3}$, ſiue 9 dies, 8 horas.

Articvlvs II.

De regula conſortij.

Fit

Fit interdum, vt plures mercatores ſocietatem ineant, & vt aut de lucro, quod conſequuntur, inter ipſos diuidendo; aut, ſi de lucro conuentum ſit; quid quilibet in ſortem conferre debeat; aut denique, ſi de vtroque horum conſtet, de tempore tamen, quo pecuniam expendendam in ſorte eſſe neceſſe ſit, quæſtio oriatur. Colligantur primo pecuniæ ſingulorum in ſortem datæ, aut tempora, in vnam ſummam. Quod ſi tempora pecunijs intercurrant, ducatur quælibet pecunia in ſuum tempus, deinde fiat collectio. Collectione facta, ſtatuatur primo loco ſumma collecta; ſecundo lucrum, vel damnum: tertio ſingulorum pecuniæ in ſortem datæ, aut producta ex pecunijs & temporibus facta.

Primum exemplum. Tres mercatores lucrati ſunt 300 aureos. Primus expoſuit 800 au. Secundus 672; Tertius 448, quæro quantum quilibet ex lucro 300 aureorum capiat? Addantur in vnam ſummam pecuniæ expoſitæ, nempe 800, 672, 448. Quo facto, dico, ſūma pecuniæ expoſitę 1920 dat 300 aureorū lucrum, quid dant ſingulorum pecuniæ expoſitæ? & reperio pro primo 125 au. pro ſecundo 105, pro tertio 70,

1920 | 300 | 800, 672, 448

Secundum. Tres mercatores in negotiatione perdiderunt 100 aureos. Contulerunt autem omnes æqualem pecuniæ ſummam; ſed primi in ſorte fuit menſibus 20; ſecundi 16; Tertij 14: quæro quantum quilibet damnum pati debeat? Menſium ſumma eſt 50. Ter ergo regula proportionum vſurpanda eſt, hoc modo: ſed quia, cuius pecunia longiore tempore in ſorte fuit, minus damni pati de-

50 | 100 | 20, 16, 14

bet, inuerto primi, & ſecundi menſes, hoc modo, reperioq; operatione abſoluta, damnum primi eſſe 28; ſecundi 32; tertij 40 aureorum.

50	100	14
		16. &
		20

Tertium. Tres lucrati ſunt 1925 aureos: primus contulit in ſortem 400 au. per 20 menſes: ſecundus 500 per menſes 25: tertius 600 per 30 menſes. Quæro quantum quilibet ex lucro capiat? Duco menſes in pecunias expoſitas, & produco hos numeros 8000, 12500. 18000; quorum ſumma eſt 38500. Iam vtor regula proportionum ter, hoc modo.

38500	1925	8000.
		12500.
		18000.

Abſoluta operatione, reperio primum ex lucro capere 400 au. ſecundum 625; tertium 900. Summa omnium cum ſit 1925, bene operati ſumus.

Sed placet hoc ipſum exemplum aliter proponere. Tres mercatores lucrati ſunt 1925 aureos. Primus per 20 menſes expoſuit 400: ſecundus expoſuit 500: tertius 600. Accepit autem in diſtributione primus 400; ſecundus 625; tertius 900: quæro quot menſibus pecuniæ ſecundi, & tertij in ſorte fuerint? Pecunia primi in ſortem data ducta in ſuum tẽpus, facit 8000. Colloco ergo primo loco lucrum primi: ſecundo 8000: tertio lucra ſecundi, & tertij hoc modo. 400 | 8000 | 625. 900. operatione facta, proueniunt 12500, & 18000; quibus per pecunias expoſitas ſecundi, & tertij diuiſis, proueniunt 25, & 30 tempora ſecundi, & tertij.

Quar-

Quartum. Tres lucrati ſunt 1500 aureos. Primus in ſortem contulit 2400 per 12 menſes: ſecundus contulit 1600: tertius in ſorte habuit ſuas pecunias 10 menſibus. Accepit autem primus ex lucro 600; ſecundus 500; tertius 400 au. Quæro quandiu pecunia ſecundi in ſorte fuerit, & quid tertius contulerit? Duco pecuniam primi in ſortem datam in ſuum tempus, & produco 28800. Iam colloco primo loco lucrum primi, ſecundo 28800, tertio lucra ſecundi, & tertij hoc modo. 600 | 28800 | $\frac{500}{400}$. Facta operatione reperio 24000, & 19200. Diuiſis igitur 24000 per pecuniam expoſitam ſecundi 1600, proueniunt 15; atq; tot menſibus pecunia ſecundi in ſorte fuit. Diuiſis verò 19200 per 10 tempus tertij, proueniunt 1920, pecunia in ſortem data tertij.

ARTICVLVS III.

DE REGVLA ALLIgationis.

Miſcet, & alligat hæc regula varia inter ſe precia, quorum duo, aut plura ſunt ſtatuta, & determinata, vnum arbitrarium, ſeu voluntariũ. Debet autem ſemper precium arbitrarium eſſe quaſi medium inter ſtatuta, non quidem exactè; ſed ita, vt ſi duo tantum ſint ſtatuta, vnum maius, alterum minus ſit arbitrario: ſi plura, ſaltem vnum ſit maius, aut vnum minus arbitrario.

Secundò, in preciorũ mixtura ponendũ eſt arbitrariũ ſiniſtrorſum: in medio ſtatuta; dextrorsũ differẽtię arbitrarij, & ſtatutorũ, alternè tñ, h. e. differentia arbitrarij, &

maioris ſtatuti ponenda eſt ad latus minoris ſtatuti; & contra differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti, ad latus maioris ſtatuti. Si fuerint plura ſtatuta maiora arbitrario, & plura minora, perinde eſt quæcunque maiora cum quibuſcunque minoribus permiſceas; poſſunt enim mixturæ varijs fieri modis. Si tantum vnum ſit ſtatutum minus arbitrario, reliqua maiora, ponēda eſt differentia arbitrarij, & minoris ſtatuti ad omnium maiorum ſtatutorum latera; & omnes, omnium maiorum ſtatutorum differentiæ ad latus minoris ſtatuti. Idem intellige, ſi vnum tantum ſtatutum ſit maius arbitrario, reliqua minora.

Tertio; in operatione ponatur primo loco ſumma differentiarum: ſecundo numerus precij ſtatuti. Tertio ſingulæ differentiæ, & toties inſtituatur regula proportionum, quot ſunt differentiæ. Sed exemplis præcepta illuſtremus.

Primum. Sunt duo genera vini, menſura vnius venit 20, alterius 12 cruciferis; cupio ex vtroq; vnam menſurā emere, quæ conſtet 17 cruciferis; quæro quātum ex quolibet accipere debeam? Pono differentiam 17 & 20. ad latus dextrum 12: differentiam 17 & 12 ad latus 20 hoc modo: hic precium arbitrarium ſunt 17, ſtatuta 20,& 12; differentiæ 5 & 3.

17	20	5
	12	$\frac{5}{8}$

Dico ergo ſumma differentiarum, nimirum 8 dat 1 menſuram precij arbitrarij (nam vnam tantum emere volo ſi enim plures vellem. V. G. 20, ponerem loco ſecundo 20) quid dant differentiæ 5 & 3? operatione abſoluta reperio ex menſura 20 cruciferorum $\frac{5}{8}$, ex menſura vero 12 cruciferorum $\frac{3}{8}$ vnius menſuræ, accipiendas. Si vellem emere 20, ſic

ſic exemplum ſtaret. 8 | 20 | $\frac{5}{3}$. reperiremque ex vino 20 cruciferorum 1 $\frac{1}{2}$, ex vino vero 12 crucif. 7$\frac{1}{2}$ menſuras accipiendas.

Eodem modo detegitur furtum aurifabri regis Hieronis, vt Vitruuius habet lib. [illegible].cap.3. Cum enim Hiero Dijs auream coronam vouiſſet, & aurifaber ſublata portione auri, tantundem argenti ſubſtituiſſet, detexit Archimedes hac arte furtum. Accepit duas maſſas, vnam puri auri, alteram puri argenti, eiuſdem cum corona ponderis, miſitque & coronam, & vtramque maſſam in vas aqua plenum, quantumque quælibet aquæ eiecerit notauit. Ponamus maſſam auri eieciſſe 60 vncias aquæ, coronam 65, maſſam argenti 90. Hic aqua, quam corona eiecit, eſt precium arbitrarium, quam maſſæ auri & argenti, ſtatuta, vt hic apparet. 65 | $\frac{90}{60}$ | $\frac{5}{25}$. Iam ſi corona ponatur 100 librarum fuiſſe, Dico. Summa differentiarum 30, dat 100 libras, quid dant ſingulæ differentiæ? Inuenioque 16$\frac{2}{3}$, & 83$\frac{1}{3}$: Ergo 16$\frac{2}{3}$ libras auri ſublegit, totidemque argenti ſubſtituit aurifaber.

Secundum exemplum. Sunt tria genera panni; primi generis vlna venditur 24, ſecundi 12, tertij 8 cruciferis. Cupio ex omnibus accipere vlnam quæ conſtet 18 cruciferis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Hic arbitrarium precium, ſunt 18 cruciferi, ſtatuta 24, 12, & 8 cruciferi. Differentia 18 & 24, quæ eſt 6. ponitur, & ad 12, & ad 8: differentia vero tam 18 & 12, quam 18 & 8 ponitur ad 24, vt hic vides. Sũma differentiarum eſt 28. Dico ergo 28 dant 1 vlnam,

18	24	6. 10:
	12	6.
	8	6.

quid dant differentiæ 16. 6. 6, & inuenio ex vlna 28 cruciferorum $\frac{8}{14}$, ex vlnis 12, & 8 cruciferorum accipiendas eſſe $\frac{7}{14}$ vnius vlnæ.

Tertium. Libra croci venit 34, libra piperis 30, libra cinnamomi 18, libra cingiberis 16 cruciferis. Cupio ex omnibus 12 libras emere pro 4 aureis; quæro quantum ex quolibet genere accipere debeam? Primo, indagandum eſt precium arbitrariũ, quod ita fit. Diuido 4 aureos, ſiue 240 cruciferos per 12, & reperio 20 cruciferos, precium arbitrarium. Sic ergo forma habet.

	34	4
20	30	2
	18	10
	16	14

Alligaui 34, & 16 cum 20; deinde 30 & 18: Quo facto dixi. Summa differẽtiarum 30 dat 12 libras, quid dant ſingulæ differentiæ? Reperiq; pro primo genere aromatum $1\frac{3}{5}$, pro ſecundo $\frac{4}{5}$, pro tertio 4, pro quarto $5\frac{3}{5}$ lib. quæ cum ſimul faciant 12, bene operati ſumus.

Quando plura ſunt precia ſtatuta, vt in hac tertia quæſtione, poſſunt alligationes fieri pluribus modis; poſſum enim etiam 34 cum 18; & 30 cum 16, ligare, vt hic apparet. Ex qua alligatione ſequitur, ex primo genere aromatum accipiendas eſſe $\frac{4}{5}$, ex ſecundo $1\frac{3}{5}$, ex tertio $5\frac{3}{5}$, ex quarto 4 libras.

	34	2
20	30	4
	18	14
	16	10

ANNOTATIO.

Quod fit ex precio arbitrario in ſummam differentiarum, æquale eſt illis, quæ fiunt ex omnibus preciis ſtatutis in omnes differentias collaterales.

Item quod fit ex precio arbitrario in numerum precij arbitrarij; æquale eſt illis, quæ fiunt ex precijs ſtatutis in parte

tus per regulam inuentas. Vt in tertio exemplo, quod ſit ex 2 0 precio arbitrario in 1 2 numerum precij arbitrarij, æquale eſt illis, quæ ſiunt ex 3 4 in 1 $\frac{7}{9}$, & ex 3 0 in $\frac{1}{2}$, & ex 1 8 in 4, & ex 1 6 in 5 $\frac{1}{3}$ &c.

Articvlvs IIII.

De Regvla Poſitionis.

Hæc regula, quæ etiam regula Falſi dicitur, duplex eſt, ſimplicis, & duplicis poſitionis. Harum regularum hoc eſt diſcrimen, quod quidquid per primam ſolui poteſt, poſſit & per ſecundam; non contra. Prima regula tunc tantũ vſui eſſe poteſt, quando eſt, vt numerus per poſitionem inuẽtus, ad ipſam poſitionem, ità numerus notus ad inueniendum. Simplicis poſitionis quæſtiones ſoluturus, pone pro numero inueniendo, numerum quemcunq;, cum eoq; progredere iuxta quæſtionis ſententiam, non ſecus, ac ſi ille eſſet numerus quæſitus. Ac tandem vtere regula proportionũ. Primo loco ponendo, quod inuentum eſt ex theſi. Secundò, numerum quem pro quæſito poſuiſti. Tertiò, illud quod in quæſtione notum ponitur.

Primum exemplum. Tres inter ſe diuidunt 126 aureos, eâ lege, vt ſecundus duplo, tertius triplo plus habeat primo. Pono primum habere 4; habet ergo ſecũdus 8; tertius 12: ergo omnes 24; deberent autem habere 126. Dico igitur 24 dant 4; quid dant 126, & reperio 21 pecuniam primi, habet ergo ſecundus 42; tertius 63; qui numeri cum coniunċti faciant 126, bene operati ſumus.

Secundum. Cuidam quatuor debitores debent 1000 aureos. Si primus quotannis perſoluat 18; ſecundus 16; tertius 10; quartus 6: quæro quanto tẽpore totum debitum ſint perſoluturi, & quantum quiſque debeat? Pono 6 annis, quibus dat primus 108; ſecundus 96; tertius 60; quartus 36: qui numeri coniuncti faciunt 300, deberent autem facere 1000. Dico ergo. 300 dant 6; quid dant 1000, & reperio 20: Ergo annis 20 totum debitum perſoluetur: quibus dat primus 360; ſecũdus 320; tertius 200, quartus 120: qui numeri cum ſimul faciant 1000, bene operati ſumus.

Tertium. Quidam rogatus, quot haberet pecunias, reſpondit. Si adhuc haberem tot, quot habeo, & præterea $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ meæ pecuniæ, haberem 85 aureos. Quæro quantum habeat? Ponatur habere 6; quibus ſi adhuc tot addam; Item $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, ſcilicet 3, & 2, conflabo 17. Dico ergo 17 dant 6; quid dant 85; & reperio 30 aureos; quibus ſi addantur 30, & dimidium, nempe 15, & $\frac{1}{3}$ ſcilicet 10, conflabuntur 85.

Quartum. Hæreditatis meæ $\frac{2}{3}$ pro cenſu annuo expoſui; $\frac{1}{4}$ ludendo amiſi, retineo adhuc 115 aureos; quæro quanta fuerit hæreditas? Pono fuiſſe 12 au. cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 8; $\frac{1}{4}$ eſt 3: ſumma 11; quibus ex 12 ſubtractis reſtat 1; deberent autem 115 reſtare. Dico ergo 1 dat 115; quid dant 12? & reperio 1380 aureos. Cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 920; $\frac{1}{4}$ eſt 345, quæ quia cum 115 faciunt 1380, bene operati ſumus.

De duplici poſitione.

Regula duplicis poſitionis ſic habet. Pone pro numero

mero inueniendo numerum quemcunque, cumque il-lo procede iuxta quæſtionis ſententiam; qui ſi quæſtioni ſatis fecerit, erit ille numerus quæſitus. Si non ſatis fecerit, pone errorem infra poſitionem cum litera P, vel M, prout per exceſſum, vel defectum erratum fuerit.

Secundò, pone alium numerum, cum quo, vt cum priore, procede, errore cum litera P, vel M, infra poſitionem collocato.

Tertiò, ſi vterq; error habuerit P, vel M, (quæ literæ ſignificant plus, & minus) ſubtrahe minorem ex maiore, reſiduum erit diuiſor. Si alter habuerit P, alter M, adde errores, eritque vtriuſque ſumma diuiſor.

Quartò, duc per crucem primam poſitionem in errorem ſecundum; ſecundam in errorem primum; productum minus tolle ex maiore, ſi vterque error habuerit P, vel M: ſi vnus P, alter M, adde producta.

Quintò. Reſiduum, aut ſummam diuide per diuiſorem ante repertum, & erit, quod prouenit, numerus occultus, qui quæritur.

Primum exemplum. Duo habent pecunias, ſi primus dat ſecundo 7 au. habet ſecundus triplo plus primo: ſi vero ſecundus dat primo 3, habet vterq; æqualem ſummam, quæro quantum quilibet habeat?

19	╳	21
29		35
Error 4 M	4	8 M. Error
Primus	Diuiſor.	Secundus

Pono pro pecunia primi numerum quēcunque, dummodo maior ſit quam 7, vt ſecundo poſſit dare 7. Ponamus igitur primum habere 19 aureos, ex quibus ſi dederit ſecundo 7, retinebit ipſe 12, cuius triplum eſt 36, ex quo ſi tol-

las 7, reſtant 29, pecunia ſecundi. Si ſecundus det primo 3, retinebit ipſe 26, & habebit primus 22, qui numerus cum minor ſit numero 26, errauimus per defectum, hoc numero 4, qui eſt error primus. Ponatur ſecundo primus habere 21 au. qui vbi ſecundo dederit 7, retinebit ipſe 14; ex cuius triplo 42, ſi tollo 7, reſtant 35, pecunia ſecundi. Qui ſi primo dederit 3, retinebit ipſe 32, & habebit primus 24; qui, numerus cum ſit minor, quam 32, iterum per defectum hoc numero 8, erratum eſt. Subtrahe minorem errorem ex maiore, & reſtabit Diuiſor 4. Duc deinde per crucem, tam 8, ſecundum errorem in 19, primam poſitionem; quam 4, primum errorem in 21, ſecundam poſitionem, & produces 152, & 84. Subtractis 84 ex 152, reſtant 68, quibus per 4 diuiſis, proueniunt 17, pecunia primi. Rurſus ſi ducas, tam 8 in 29, quam 4 in 35, produdes 232 & 140. Subtractiſque 140 ex 232, & reſiduo 92 per 4 diuiſo, proueniunt 23, pecunia ſecundi. Nam ſi primus, qui habet 17, det ſecundo, qui habet 23, ſeptem, habebit ſecundus 30, primus 10. Si vero ſecundus dederit primo 3, habebit vterq; 20: quæſtio ergo recte ſoluta eſt.

60		80
180		160
120. M.		P. 80
	200	
	Diuiſor.	

Secũdum. Diuidatur numerus 240 in duas partes, vt ſi minor ducatur in 7, maior in 3, producta fiant æqualia. Ponatur minor 60; erit ergo maior 180. Si ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 420, & 540; erratum ergo eſt per defectum hoc numero 120. Pona-

Ponatur ſecundo minor 80; erit igitur maior 160; ſi ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 560, & 480; erratum igitur eſt per exceſſum, hoc numero 80. Summa errorum 200; eſt diuiſor. Si iam per crucem tam 120 in 80; quam 80 in 60 ducantur, producentur 9600, & 4800; quorum ſumma 14400 per Diuiſorem 200 diuiſa, reddit 72, partem primam, & minorẽ; qua ex 240 ſubtracta, reſtat maior 168: nam tam 72 in 7; quam 168 in 3 ducta, producunt 504.

ANNOTATIO I.

Gemma Friſius hanc regulã extendit ad radicum extractiones; verum cum in multis exemplis fallat, non ducimus operæ precium plura de illa dicere. Nam ſi proponatur talis quæſtio. Dentur duo numeri in dupla proportione, vt in ſe ducti procreent 98, ſuccedit regula Gẽmæ; ſi vero talis proponatur. Dentur duo numeri, quorum exceſſus ſit 4, vt in ſe ducti producant 165, fallit. Cæterum ſimilium quæſtionum ſolutiones petantur ex art. 3. cap. 3. lib. 2.

ANNOTATIO II.

Praxin Italicam, & alia Compendia in regulis hactenus traditis conſulto omiſi, quod vſu melius, quã regulis diſcatur: multitudine enim regularum obruimur, quæ vſu diſcimus, tenaciſſimè hærent. Quis.n.non videt, ſi vel mediocriter in calculo ſit exercitatus, poſſe in regula proportionũ pro magnis homogeneorũ terminis, minores eiuſdẽ proportionis ſubſtitui? Vt pro 12 & 36, hos 1, 3: pro 225 & 1575, hos, 1, 7: Si.n. talis ꝑponatur quæſt. Aureis 225 emo 87 vrnas vini quãtũ emo aureis 1575? totidẽ vrnas inuenio, quot inuenirẽ, ſi dicerem, aureo 1, emo 87 vrnas, quot emo aureis 7? Vtrobiq, enim

enim inuenio vrnas 6 0 9; quod vtrobiq; homogeneorum terminorum ſeptupla ſit proportio.

CAPVT IIII.

DE NVMERORVM *proprietatibus.*

In hoc cap. primò agam de numero abſolutè conſiderato. Secundò, de numero relato. Tertiò, de numero geometricas figuras repræſentante.

ARTICVLVS I.

DE NVMERO ABSOLUTÈ *conſiderato.*

Numeri abſolutè conſiderati. Primò diuiduntur in pares, & impares. Pares ſunt, quos binarius numerat; Impares, quos binarius non numerat.

Species parium duæ ſunt. Sunt enim, aut pariter pares; aut pariter impares. Pariter par eſt, quem numerus par per parem metitur, cuiuſmodi eſt 8. quem 2 per 4 metitur. Pariter impar eſt, quem par per imparem metitur, vt eſt numerus 10, quem 2 per 5 metitur.

Impariter impar non eſt ſpecies paris, ſed imparis, cuiuſmodi eſt numerus 15, quem impar per imparem metitur, vt 3 per 5.

Proprietates parium, & imparium ſunt. Prima par additus pari, facit parem. Secunda. Par additus impari, facit imparem. Tertia. Impar additus impari, facit parem. Quarta. Par ſubtractus à pari, relinquit parem.

Quin-

Quinta. Par ſubtractus ab impari, relinquit imparem.
Sexta. Impar ſubtractus ab impari, relinquit parem.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3. 5. 7. 11. 13. &c.

Primi inter ſe ſunt, quos ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3 & 4, 8 & 9, 10 & 13 &c.

Numerus compoſitus eſt, quem aliquis numerus metitur; Cuiuſmodi ſunt 4. 6. 8. 10. 12. &c.

Compoſiti inter ſe ſunt, quos aliquis numerus, qui communis eorum menſura dicitur, metitur.
Cuiuſmodi ſunt 4 & 8; 6 & 12; 4 & 10; 16 & 20 &c. duos priores metiuntur 2 & 4. duos ſequentes 2. 3 & 6; duos tertios 2. Duos poſtremos 2, & 4.

Numerus perfectus eſt, qui ſuis partibus eſt æqualis cuiuſmodi ſunt 6. 28. 496.

Abundans eſt, qui ſuis partibus eſt maior.

Diminutus, qui ſuis partibus eſt minor. Intelligo per partes, partes aliquotas; ſeu quotos illorum numerorum, per quos diuidi poſſunt: Vt 6 diuidi poteſt per 2 3 & 6, quorum quoti 3. 2. 1. faciunt 6. Et 28 diuidi poteſt per 2. 4. 7. 14. 28; quorum quoti 14. 7. 4. 2. 1. faciunt 28. Numerum 12 diuidunt 2. 3. 4. 6. 12; quorum quoti 6. 4. 3. 2. 1. faciunt 16, plus quam 12. Numerum 10 diuidunt 2 & 5; quorum quoti 5 & 2 faciunt 7, minus quam 10. Vnde 6 & 28 ſunt numeri perfecti. 12 abundans. 10 diminutus.

Perfecti inueniũtur ex progreſſione geometrica duorum parium, vt ex 2 & 4. ex 4 & 8; ex 16 & 32; ex 64 & 128; ex 256 & 512; ex 1024 & 2048 &c. Si nimirum ex maiore tollatur vnitas, reſiduum ducatur

tur in minorem: ita ex 2 & 3 fiunt 6. Ex 4 & 7 fiunt 28. ex 16. & 31 fiunt 496. ex 64 & 127 fiunt 8128 &c.

Annotatio.

Pares & impares inter abſolutos, non inter relatos repono, quod eorum definitiones abſoluta & abſolutorum ſint, non relata & relatorum.

Articvlvs II.

De Nvmero Relato.

Huc pertinent proportiones, proportionalitates, & medietates, ſiue progreſſiones, de quibus ſingulis compendio eſt agendum.

De Proportionibus.

Proportio triplex eſt, æqualitatis, maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Æqualitatis eſt, quando æqualis numerus ad æqualem refertur, vt 4 ad 4.

Maioris inæqualitatis eſt, quando maior numerus ad minorem; Minoris, quando minor ad maiorē refertur. Vtriuſq; quinq; ſunt ſpecies. Prima maioris inæqualitatis dicitur Multiplex. Secunda ſuperparticularis. Tertia ſuperpartiens. Quarta Multiplex ſuperparticularis. Quinta Multiplex ſuperpartiens.

Multiplex eſt, quando maior minorem aliquoties cōtinet. Vt bis, ter, quater, decies, centies, &c. Cuiuſmodi cernitur inter 4 & 2; inter 9 & 3; inter 20 & 5; inter 100 & 10 &c. quarum prima dicitur dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla, quarta decupla, &c.

Superparticularis eſt, quando maior minorem ſemel conti-

contiwet, & inſuper vnam eius partem: cuiuſmodi proportio eſt inter 3 & 2: inter 4 & 3; inter 9 & 8. Prima dicitur ſeſquialtera; ſecũda ſeſquitertia: Tertia ſeſquiquarta; quarta ſeſquioctaua. Eſt proportio ſuperparticularis inter omnes numeros vnitate ſeſe excedentes, & inter eorum æquè multiplices. Vt inter 12, & 11: inter 36 & 33: inter 60, & 56, &c. Dicuntur 36, & 33, ipſorum 12 & 11 æquè multiplices, cum creentur ex ductu ipſorum 12, & 11, in 3: Similiter 60, & 56 fiunt ex 15 & 14, in 4. Superpartiens eſt quando maior minorem ſemel, & inſuper aliquot eius partes continet: Cuiuſmodi proportio eſt inter omnes numeros inter ſe primos, modo eorũ exceſſus ſit plus quam vnitas. Item inter eorum æquè multiplices: Cuiuſmodi eſt inter 7, & 5: inter 14 & 10: inter 27 & 17: inter 81 & 51. Prima, & ſecunda dicitur ſuperquintupartiens duas: Tertia & quarta ſuperſeptemdecupartiens decimas &c.

Multiplex ſuperparticularis, compoſita ex multiplici, & ſuperparticulari eſt, quando maior minorem aliquoties, & inſuper vnam eius partem continet: Cuiuſmodi eſt inter 5 & 2: inter 19 & 6; inter 29 & 7: prima dicitur dupla ſeſquialtera: Secunda tripla ſeſquiſexta: Tertia quadrupla ſeſqui ſeptima.

Multiplex ſuperpartiens, ex multiplici, & ſuperpartiẽte cõpoſita eſt, qñ maior minorẽ aliquoties, & inſuper aliquot eius partes continet; cuiuſmodi eſt inter 34 & 7: inter 14 & 5. prima dicitur quadrupla ſuperſeptupartiens ſextas: ſecunda dupla ſuperquintupartiens quartas.

Proportio minoris inæqualitatis eſt qñ minor cũ maiore comparatur. Eaſdem quas prior habet ſpecies; ſed præfigitur illis particula (Sub) vt ſubmultiplex, ſub-

ſuper-

perparticularis; ſubſuperpartiens, &c. Hinc inter 2 & 4 dicitur eſſe proportio ſubdupla; inter 2 & 3 ſubſeſquialtera; inter 3 & 12 ſubquadrupla &c.

ARTICVLVS III.

DE PROPORTIONVM Compoſitione.

Proportionum Compoſitio fit per Additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem, quam Cla. in fine lib. 9. Euclid. explicat. Cum enim addit proportionem proportioni, addit inter ſe denominatores proportionis. Vt ſi addendæ ſint dupla & tripla, fit quintupla, quod ex additione denominatorum 2 & 3, fiant 5. Si addenda ſit dupla ſeſquioctaua ad triplam ſeſquiquartam, fiet $5\frac{3}{8}$, ſcilicet quintupla ſuperoctupartiens tertias. Nam denominator duplæ ſeſquioctauæ eſt $2\frac{1}{8}$, triplæ ſeſquiquartæ $3\frac{1}{4}$, quæ inuicem additæ, faciunt $\frac{3}{8}$

Cum proportio proportioni ſubtrahitur, denominator minor ex maiore ſubtrahitur, vt ſi dupla ex ſextupla ſit ſubtrahēda, reſtat quadrupla: ſi ſeſquialtera ex tripla, reſtat ſeſquialtera: nam denominator ſeſquialteræ eſt $\frac{3}{2}$; triplæ 3, ſiue $\frac{6}{2}$: ſubtractis autem $\frac{3}{2}$ ex $\frac{6}{2}$, reſtant $\frac{3}{2}$, ſiue $1\frac{1}{2}$. In multiplicatione proportionis, in ſe ducuntur denominatores proportionis, vt ſi tripla ſit ducenda in quadruplam, gignetur duodecupla. Si tripla ſuperſeptupartiens tertias in duplam ſeſquiquartam, hoc eſt, $3\frac{3}{7}$, in $2\frac{1}{4}$, producetur $7\frac{5}{7}$, hoc eſt, ſeptupla ſuperſeptupartiens quintas.

Eodem

Eodem modo in diuiſione diuiditur maior proportionis denominator per minorem. Vt ſi diuidenda ſit decupla per duplam, proueniet quintupla: ſi quadrupla ſuperquadrupartiens tertias per ſeſquialteram, hoc eſt, $4\frac{3}{4}$ per $1\frac{1}{2}$, proueniet tripla ſeſquiſexta, hoc eſt $3\frac{1}{6}$. Vides ergo eodem modo proportionum Multiplicationem, & Diuiſionem fieri, quo numerorum fractorum.

Articvlvs IIII.

DE ANALOGIA, SIVE *proportionalitate.*

Authores plerique Analogiam vocant medietatem. Numerantur analogiæ plures; ſed ex illis tres ſunt præcipuæ, Arithmetica, Geometrica, & Muſica, quas etiam progreſſiones appellamus. De ſingulis pauca dicenda ſunt.

DE PROGRESSIONE *Arithmetica.*

Arithmetica progreſſio eſt ſeries numerorum, in qua tres, aut plures numeri per eandem differentiam progrediuntur, vt hic eſt videre.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15.
16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. &c.
2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26.
28. 30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. &c.
1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25.
27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. &c.
5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55.
60. 65. 70. 75. 80. 85. 90. 95. 100. &c.

Secundum. Cuidam quatuor debitores debent 1000 aureos. Si primus quotannis perſoluat 18; ſecundus 16; tertius 10; quartus 6: quæro quanto tẽpore totum debitum ſint perſoluturi, & quantum quiſque debeat? Pono 6 annis, quibus dat primus 108; ſecundus 96; tertius 60; quartus 36: qui numeri coniunctì faciunt 300, deberent autem facere 1000. Dico ergo. 300 dant 6; quid dant 1000, & reperio 20: Ergo annis 20 totum debitum perſoluetur: quibus dat primus 360; ſecũdus 320; tertius 200, quartus 120: qui numeri cum ſimul faciant 1000, bene operati ſumus.

Tertium. Quidam rogatus, quot haberet pecunias, reſpondit. Si adhuc haberem tot, quot habeo, & præterea $\frac{1}{2}$, & $\frac{1}{3}$ meæ pecuniæ, haberem 85 aureos. Quæro quantum habeat? Ponatur habere 6, quibus ſi adhuc tot addam; Item $\frac{1}{2}$ & $\frac{1}{3}$, ſcilicet 3, & 2, conflabo 17. Dico ergo 17 dant 6; quid dant 85: & reperio 30 aureos; quibus ſi addantur 30, & dimidium, nempe 15, & $\frac{1}{3}$ ſcilicet 10, conflabuntur 85.

Quartum. Hæreditatis meæ $\frac{2}{3}$ pro cenſu annuo expoſui; $\frac{1}{4}$ ludendo amiſi, retineo adhuc 115 aureos; quæro quanta fuerit hæreditas? Pono fuiſſe 12 au. cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 8; $\frac{1}{4}$ eſt 3: ſumma 11; quibus ex 12 ſubtractis reſtat 1; deberent autem 115 reſtare. Dico ergo 1 dat 115; quid dant 12? & reperio 1380 aureos. Cuius $\frac{2}{3}$ ſunt 920; $\frac{1}{4}$ eſt 345, quæ quia cum 115 faciunt 1380, bene operati ſumus.

De duplici poſitione.

Regula duplicis poſitionis ſic habet. Pone pro numero

mero inueniendo numerum quemcunque, cumque il-
lo procede iuxta quæſtionis ſententiam; qui ſi quæſtio-
ni ſatis fecerit, erit ille numerus quæſitus. Si non ſatis
fecerit, pone errorem infra poſitionem cum litera P, vel
M, prout per exceſſum, vel defectum erratum fuerit.

Secundò, pone alium numerum, cum quo, vt cum
priore, procede, errore cum litera P, vel M, infra po-
ſitionem collocato.

Tertiò, ſi vterq; error habuerit P, vel M, (quæ literæ
ſignificant plus & minus) ſubtrahe minorem ex ma-
iore, reſiduum erit diuiſor. Si alter habuerit P, alter M,
adde errores, eritque vtriuſque ſumma diuiſor.

Quartò, duc per crucem primam poſitionem in er-
rorem ſecundum; ſecundam in errorem primum; pro-
ductum minus tolle ex maiore, ſi vterque error habue-
rit P, vel M: ſi vnus P, alter M, adde producta.

Quintò. Reſiduum, aut ſummam diuide per diuiſo-
rem ante repertum, & erit, quod prouenit, numerus
occultus, qui quæritur.

Primum exemplum. Duo habent pecunias, ſi pri-
mus dat ſecundo 7 au. habet ſecundus triplo plus pri-
mo: ſi vero ſecundus dat primo 3, habet vterq; æqua-
lem ſummam, quæro quantum quilibet habeat?

Pono pro pecunia primi numerum quemcunque, dummodo maior ſit quam 7, vt ſecundo poſſit dare 7. Ponamus igitur primum habere 19 aureos, ex quibus ſi dederit ſecundo 7, retinebit ipſe 12, cuius triplum eſt 36, ex quo ſi tol-

	19	✕	21	
	29		35	
Error	4 M	4	8 M.	Error
Primus		Diuiſor.		Secundus

lâs 7, reſtant 29, pecunia ſecundi. Si ſecundus det primo 3, retinebit ipſe 26, & habebit primus 22, qui numerus cum minor ſit numero 26, errauimus per defectum, hoc numero 4, qui eſt error primus. Ponatur ſecundo primus habere 21 au. qui vbi ſecundo dederit 7, retinebit ipſe 14; ex cuius triplo 42, ſi tollo 7, reſtant 35, pecunia ſecundi. Qui ſi primo dederit 3, retinebit ipſe 32, & habebit primus 24; qui numerus cum ſit minor, quam 32, iterum per defectum hoc numero 8, erratum eſt. Subtrahe minorem errorem ex maiore, & reſtabit Diuiſor 4. Duc deinde per crucem, tam 8, ſecundum errorem in 19, primam poſitionem; quam 4, primum errorem in 21, ſecundam poſitionem, & produces 152, & 84. Subtractis 84 ex 152, reſtant 68, quibus per 4 diuiſis, proueniunt 17, pecunia primi. Rurſus ſi ducas, tam 8 in 29; quam 4 in 35, produces 232 & 140. Subtractiſque 140 ex 232, & reſiduo 92 per 4 diuiſo, proueniunt 23, pecunia ſecundi. Nam ſi primus, qui habet 17, det ſecundo, qui habet 23, ſeptem, habebit ſecundus 30, primus 10. Si vero ſecundus dederit primo 3, habebit vterq; 20: quæſtio ergo recte ſoluta eſt.

60		80
180	╳	160
120. M.		P. 80
	200	
	Diuiſor.	

Secũdum. Diuidatur numerus 240 in duas partes, vt ſi minor ducatur in 7, maior in 3, producta fiant æqualia. Ponatur minor 60; erit ergo maior 180. Si ille in 7; hic in 3 ducatur, producentur 420, & 540; erratum ergo eſt per defectum hoc numero 120. Pona-

Ponatur ſecundo minor 80; erit igitur maior 160; ſi ille in 7, hic in 3 ducatur, producentur 560, & 480; erratum igitur eſt per exceſſum, hoc numero 80. Summa errorum 200; eſt diuiſor. Si iam per crucem tam 120 in 80; quam 80 in 60 ducantur, producentur 9600, & 4800; quorum ſumma 14400 per Diuiſorem 200 diuiſa, reddit 72, partem primam, & minorē; qua ex 240 ſubtracta, reſtat maior 168: nam tam 72 in 7; quam 168 in 3 ducta, producunt 504.

ANNOTATIO I.

Gemma Friſius hanc regulā extendit ad radicum extractiones; verum cum in multis exemplis fallat, non ducimus operæ precium plura de illa dicere. Nam ſi proponatur talis quæſtio. Dentur duo numeri in dupla proportione, vt in ſe ducti procreent 98, ſuccedit regula Gēmæ; ſi vero talis proponatur. Dentur duo numeri, quorum exceſſus ſit 4, vt in ſe ducti producant 165, fallit. Cæterum ſimilium quæſtionum ſolutiones petantur ex art. 3. cap. 3. lib. 2.

ANNOTATIO II.

Praxin Italicam, & alia Compendia in regulis hactenus traditis conſulto omiſi, quod vſu melius, quā regulis diſcatur: multitudine enim regularum obruimur, quæ vſu diſcimus, tenaciſſime hærent. Quis.n.non videt, ſi vel mediocriter in calculo ſit exercitatus, poſſe in regula proportionū pro magnis homogeneorū terminis, minores eiuſdē proportionis ſubſtitui? Vt pro 12 & 36, hos 1, 3: pro 225 & 1575, hos, 1, 7: Si.n. talis pponatur quæſt. Aureis 225 emo 87 vrnas vini quātū emo aureis 1575? totidē vrnas inuenio, quot inuenirē, ſi dicerem, aureo 1, emo 87 vrnas, quot emo aureis 7? Vtrobiq; enim

enim inuenio vrnas 609, quod vtrobiq; homogeneorum terminorum ſeptupla ſit proportio.

Capvt IIII.

De Nvmerorvm proprietatibus.

In hoc cap. primò agam de numero abſolutè conſiderato. Secundò, de numero relato. Tertiò, de numero geometricas figuras repræſentante.

Articvlvs I.

De Nvmero abſolutè conſiderato.

Numeri abſolutè conſiderati. Primò diuiduntur in pares, & impares. Pares ſunt, quos binarius numerat; Impares, quos binarius non numerat.

Species parium duæ ſunt. Sunt enim, aut pariter pares; aut pariter impares. Pariter par eſt, quem numerus par per parem metitur, cuiuſmodi eſt 8. quem 2 per 4 metitur. Pariter impar eſt, quem par per imparem metitur, vt eſt numerus 10, quem 2 per 5 metitur.

Impariter impar non eſt ſpecies paris, ſed imparis, cuiuſmodi eſt numerus 15, quem impar per imparem metitur, vt 3 per 5.

Proprietates parium, & imparium ſunt. Prima par additus pari, facit parem. Secunda. Par additus impari, facit imparem. Tertia. Impar additus impari, facit parem. Quarta. Par ſubtractus à pari, relinquit parem.

Quin-

Quinta. Par ſubtractus ab impari, relinquit imparem.
Sexta. Impar ſubtractus ab impari, relinquit parem.

Primus numerus eſt, quem ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3. 5. 7. 11. 13. &c.

Primi inter ſe ſunt, quos ſola vnitas metitur, cuiuſmodi ſunt 3 & 4, 8 & 9, 10 & 13 &c.

Numerus compoſitus eſt, quem aliquis numerus metitur; Cuiuſmodi ſunt 4. 6. 8. 10. 12. &c.

Compoſiti inter ſe ſunt, quos aliquis numerus, qui communis eorum menſura dicitur, metitur.
Cuiuſmodi ſunt 4 & 8; 6 & 12; 4 & 10; 16 & 20 &c. duos priores metiuntur 2 & 4. duos ſequentes 2. 3 & 6; duos tertios 2. Duos poſtremos 2, & 4.

Numerus perfectus eſt, qui ſuis partibus eſt æqualis cuiuſmodi ſunt 6. 28. 496.

Abundans eſt, qui ſuis partibus eſt maior.

Diminutus, qui ſuis partibus eſt minor. Intelligo per partes, partes aliquotas; ſeu quotos illorum numerorum, per quos diuidi poſſunt: Vt 6 diuidi poteſt per 2 3 & 6, quorum quoti 3. 2. 1. faciunt 6. Et 28 diuidi poteſt per 2. 4. 7. 14. 28; quorum quoti 14. 7. 4. 2. 1. faciunt 28. Numerum 12 diuidunt 2. 3. 4. 6. 12; quorum quoti 6. 4. 3. 2. 1. faciunt 16, plus quam 12. Numerum 10 diuidunt 2 & 5; quorum quoti 5 & 2 faciunt 7, minus quam 10. Vnde 6 & 28 ſunt numeri perfecti. 12 abundans. 10 diminutus.

Perfecti inueniũtur ex progreſſione geometrica duorum parium, vt ex 2 & 4. ex 4 & 8; ex 16 & 32; ex 64 & 128; ex 256 & 512; ex 1024 & 2048 &c. Si nimirum ex maiore tollatur vnitas, reſiduum duca-

tur

tur in minorem: ita ex 2 & 3 fiunt 6. Ex 4 & 7 fiunt 28. ex 16. & 31 fiunt 496. ex 64 & 127 fiunt 8128 &c.

Annotatio.

Pares & impares inter abſolutos, non inter relatos repono, quod eorum definitiones abſoluta & abſolutorum ſint, non relata & relatorum.

Articvlvs II.

De Nvmero Relato.

Huc pertinent proportiones, proportionalitates, & medietates, ſiue progreſſiones, de quibus ſingulis compendio eſt agendum.

De Proportionibus.

Proportio triplex eſt, æqualitatis, maioris inæqualitatis, & minoris inæqualitatis. Æqualitatis eſt, quando æqualis numerus ad æqualem refertur, vt 4 ad 4.

Maioris inæqualitatis eſt, quando maior numerus ad minorem; Minoris, quando minor ad maiorē refertur. Vtriuſq; quinq; ſunt ſpecies. Prima maioris inæqualitatis dicitur Multiplex. Secunda ſuperparticularis. Tertia ſuperpartiens. Quarta Multiplex ſuperparticularis. Quinta Multiplex ſuperpartiens.

Multiplex eſt, quando maior minorem aliquoties cōtinet. Vt bis, ter, quater, decies, centies, &c. Cuiuſmodi cernitur inter 4 & 2; inter 9 & 3; inter 20 & 5; inter 100 & 10 &c. quarum prima dicitur dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla, quarta decupla, &c.

Superparticularis eſt, quando maior minorem ſemel conti-

continet, & inſuper vnam eius partem: cuiuſmodi proportio eſt inter 3 & 2: inter 4 & 3; inter 9 & 8. Prima dicitur ſeſquialtera; ſecũda ſeſquitertia: Tertia ſeſquiquarta: quarta ſeſquioctaua. Eſt proportio ſuperparticularis inter omnes numeros vnitate ſeſe excedentes, & inter eorum æquè multiplices. Vt inter 12, & 11: inter 36 & 33: inter 60, & 56, &c. Dicuntur 36, & 33, ipſorum 12 & 11 æquè multiplices, cum creentur ex ductu ipſorum 12, & 11, in 3: Similiter 60, & 56 fiunt ex 15 & 14, in 4. Superpartiens eſt quando maior minorem ſemel, & inſuper aliquot eius partes continet: Cuiuſmodi proportio eſt inter omnes numeros inter ſe primos, modo eorũ exceſſus ſit plus quam vnitas. Item inter eorum æquè multiplices: Cuiuſmodi eſt inter 7, & 5: inter 14 & 10: inter 27 & 17: inter 81 & 64: Prima, & ſecunda dicitur ſuperquintupartiens duas; Tertia & quarta ſuperſeptemdecupartiens decimas &c.

Multiplex ſuperparticularis, compoſita ex multiplici, & ſuperparticulari eſt, quando maior minorem aliquoties, & inſuper vnam eius partem continet: Cuiuſmodi eſt inter 5 & 2: inter 19 & 6; inter 29 & 7: prima dicitur dupla ſeſquialtera: Secunda tripla ſeſquiſexta: Tertia quadrupla ſeſqui ſeptima.

Multiplex ſuperpartiens, ex multiplici, & ſuperpartiẽte cõpoſita eſt, qñ maior minorẽ aliquoties, & inſuper aliquot eius partes continet; cuiuſmodi eſt inter 34 & 7: inter 14 & 5. prima dicitur quadrupla ſuperſeptupartiens ſextas: ſecunda dupla ſuperquintupartiens quartas.

Proportio minoris inæqualitatis eſt qñ minor cũ maiore comparatur. Eaſdem quas prior habet ſpecies; ſed præfigitur illis particula (Sub) vt ſubmultiplex, ſub-

ſuper-

perparticularis; ſubſuperpartiens, &c. Hinc inter 2 & 4 dicitur eſſe proportio ſubdupla; inter 2 & 3 ſubſeſquialtera; inter 3 & 12 ſubquadrupla &c.

Articvlvs III.

DE PROPORTIONVM Compoſitione.

Proportionum Compoſitio fit per Additionem, ſubtractionem, multiplicationem, & diuiſionem, quam Cla. in fine lib. 9. Euclid. explicat. Cum enim addit proportionem proportioni, addit inter ſe denominatores proportionis. Vt ſi addendæ ſint dupla & tripla, fit quintupla, quod ex additione denominatorum 2 & 3, fiant 5. Si addenda ſit dupla ſeſquioctaua ad triplam ſeſquiquartam, fiet $5\frac{3}{8}$, ſcilicet quintupla ſuperoctupartiens tertias. Nam denominator duplæ ſeſquioctauæ eſt $2\frac{1}{8}$, triplæ ſeſquiquartæ $3\frac{1}{4}$, quæ inuicem additæ, faciunt $\frac{3}{8}$

Cum proportio proportioni ſubtrahitur, denominator minor ex maiore ſubtrahitur, vt ſi dupla ex ſextupla ſit ſubtrahēda, reſtat quadrupla: ſi ſeſquialtera ex tripla, reſtat ſeſquialtera: nam denominator ſeſquialteræ eſt $\frac{3}{2}$; triplæ 3, ſiue $\frac{6}{2}$: ſubtractis autem $\frac{3}{2}$ ex $\frac{6}{2}$, reſtant $\frac{3}{2}$, ſiue $1\frac{1}{2}$. In multiplicatione proportionis, in ſe ducuntur denominatores proportionis, vt ſi tripla ſit ducenda in quadruplam, gignetur duodecupla. Si tripla ſuperſeptupartiens tertias in duplam ſeſquiquartam, hoc eſt, $3\frac{3}{7}$, in $2\frac{1}{4}$, producetur $7\frac{5}{7}$, hoc eſt, ſeptupla ſuperſeptupartiens quintas.

Eodem

Eodem modo in diuiſione diuiditur maior proportionis denominator per minorem. Vt ſi diuidenda ſit decupla per duplam, proueniet quintupla: ſi quadrupla ſuperquadrupartiens tertias per ſeſquialteram, hoc eſt, $4\frac{3}{4}$ per $1\frac{1}{2}$, proueniet tripla ſeſquiſexta, hoc eſt $3\frac{1}{6}$. Vides ergo eodem modo proportionum Multiplicationem, & Diuiſionem fieri, quo numerorum fractorum.

ARTICVLVS IIII.

DE ANALOGIA, SIVE proportionalitate.

Authores plerique Analogiam vocant medietatem. Numerantur analogiæ plures; ſed ex illis tres ſunt præcipuæ, Arithmetica, Geometrica, & Muſica, quas etiam progreſſiones appellamus. De ſingulis pauca dicenda ſunt.

DE PROGRESSIONE Arithmetica.

Arithmetica progreſſio eſt ſeries numerorum, in qua tres, aut plures numeri per eandem differentiam progrediuntur, vt hic eſt videre.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. &c.

2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20. 22. 24. 26. 28. 30. 32. 34. 36. 38. 40. 42. 44. &c.

1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. &c.

5. 10. 15. 20. 25. 30. 35. 40. 45. 50. 55. 60. 65. 70. 75. 80. 85. 90. 95. 100. &c.

Prima progreditur per vnitatẽ, ſemper enim ſequens numerus præcedentem vnitate ſuperat. Secunda, & tertia per 2. Quarta per 5. Omnium ſumma facillimè habetur hoc modo. Adduntur primus & vltimus termini; ſumma per ſemiſſem numeri terminorum; vel ſemiſſis ſummæ per numerum terminorum multiplicatur, & habetur ſumma omnium. In prima progreſſione primus & vltimus termini faciunt 25, quæ in 12 ſemiſſem numeri terminorum ducta faciunt 300, ſummam omnium. In ſecunda progreſſione ſumma primi, & vltimi termini 46, in 11, ſemiſſem numeri terminorum ducta, progignit 506, omnium ſummam. Eodem modo reperies ſummam tertiæ 484; quartæ 1050.

Habetur quoque ſumma omnium imparium ab vnitate incipientium, cuiuſmodi eſt progreſſio tertia, ſi numerus terminorum in ſe ducatur: nam ſi 22, numerus terminorum tertiæ progreſſionis, in ſe ducatur, procreantur 484, vt prius. Parium verò à binario incipientium ſumma habetur, ſi numerus terminorum in numerum vnitate maiorem numero terminorum ducatur. Si enim in ſecunda progreſſione 22, qui eſt numerus terminorum, ducatur in 23, procreabuntur 506, vt prius.

REGVLÆ PROGRESSIOnis Arithmeticæ.

Prima. Si numerus terminorum vnitate mutilatus, ducatur in differentiã terminorũ, productoq; addatur terminus primus, prodibit vltimus. Vt ſi in progreſſione quar-

quarta, habente 20 terminos, 19 in 5 ducantur, & producto terminus primus addatur, conflabuntur 100, terminus vltimus.

Secunda. Primus terminus habetur, ſi ſublata vnitate è numero terminorum, reliquum in differentiam ducatur, & productum ab vltimo termino tollatur. Vt in hac progreſſione 10. 20. 30. 40. 50. 60 habente ſex terminos, ſi vnitas ex 6 tollatur, reliquum in differentiam 10 ducatur, producetur 50, quibus ex vltimo termino 60 deductis, reſtant 10. terminus primus.

Tertia, ſi primus terminus ab vltimo tollatur, reliquum per numerum vnitate minorem numero terminorum diuidatur, prodit progreſſionis differentia. Vt in progreſſione proxima, ſi tollam 10 ex 60, reliquum 50 diuidam per 5 numerum vnitate minorem numero terminorum, proueniunt 10, differentia progreſſionis.

Quarta, ſi ſublato termino primo ab vltimo, reliquum per differentiam diuidatur, & quoto vnitas addatur, prouenit numerus terminorum. Vt ſi in eadem progreſſione 10 tollam ex 60, reliquum per differentiam 10 diuidam, & quoto vnitatem addam, exurgent 6, numerus terminorum.

Quinta, ſi ab vltimo termino primus tollatur, reſiduum erit ſumma differentiarum.

PROPRIETATES PROgreſſionis Arithmeticæ.

Prima. Datis tribus quibuſcunque progreſſionis terminis continuis, erit duplum medij, æquale ag-

gregato extremorum. Vt in his tribus 7. 8. 9, eſt tam duplum medij, quam aggregatum extremorum 16.

Secunda. Datis quatuor continuis, erit ſumma mediorum æqualis ſummæ extremorum.

Tertia. Duplum cuiuſcumque eſt æquale aggregato duorum æqualiter hinc inde diſtantium. Vt duplum ipſius 8, eſt æquale aggregato ex 1 & 15 facto; æqualiter autem, 1 & 15 ab 8 hinc inde diſtant in prima progreſſione.

DE PROGRESSIONE Geometrica.

Geometrica progreſſio eſt ſeries numerorum eadem ſe proportione ſuperantium, cuiuſmodi ſunt ſequētes.

1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4096. 8192. &c.

1. 3. 9. 27. 81. 243. 729. 2187. 6561. 19683. 59049. 177147. 531441. &c.

1. 4. 16. 64. 256. 1024. 4096. 16384. 65536. 262144. 1048576. &c.

Prima eſt dupla, ſecunda tripla, tertia quadrupla. Summa omnium habetur; ſi primus terminus tollatur ab vltimo, reſiduum diuidatur per numerū vnitate minorem denominatore propoꝛtionis (eſt autem denominator duplæ 2; triplæ 3; quadruplæ 4. &c.) & quoto addatur vltimus terminus. Ita inuenies ſummam omnium primæ progreſſionis eſſe 16383; ſecundæ 797161; tertiæ 1398101.

Geometrica progreſſio duplex eſt, continua, & diſcreta. Continua eſt, quando omnes termini præter primum,

mum, & vltimum, ſunt antecedentes & conſequentes. Nam, vt 4 ſe habent ad 8; ita 8 ſe habent ad 16; & vt 16 ſunt ad 32; ita 32 ad 64; & ita 64 ad 128, &c. Vides ergo in hac dupla progreſsione 4. 8. 16. 32. 64. 128. omnes terminos eſſe antecedentes, & conſequẽtes, præter primum. & vltimum, quorum ille tantum eſt antecedens, hic tantum conſequens.

Progreſſio diſcreta eſt, in qua non omnes termini ſunt antecedentes, & conſequentes, hoc eſt, non eſt, vt primus ad ſecundum; ita ſecundus ad tertium: ſed tantum, vt primus ad ſecundum; ita tertius ad quartum. Talis progreſſio cernitur in his quatuor numeris 2. 4. 3. 6. in quibus eſt, vt 2 ad 4; ita 3 ad 6; non autem, vt 2 ad 4; ita 4 ad 3, cum inter 2 & 4 ſit ſubdupla; inter 4 & 3 ſeſquitertia proportio.

Proportiones diſcretæ occurrunt plerumq; in regula proportionum.

PROPRIETATES PROgreſsionum geometricarum.

Vt melius intelligantur proprietates geometricæ progreſſionis notabis, Numerum in ſe ipſum ductum dici quadratum, vt eſt numerus 9, qui naſcitur ex 3 in ſe, ſiquidem ter 3 ſunt 9. Deinde idem numerus in quadratum ductus dicitur cubus, vt eſt numerus 27; nam ter 9 ſunt 27. Idem numerus ductus in cubum, dicitur biquadratum: Idem in biquadratum dicitur ſuperſolidus primus &c.

Prima proprietas. In omni progreſſione geometrica

continua numerus tertius eſt quadratus, & vno prætermiſſo quintus, ſeptimus nonus, vndecimus, &c. Quartus verò eſt cubus, & duobus prætermiſſis ſeptimus, decimus, decimus tertius, &c. Rurſus quintus eſt biquadratus, & tribus prætermiſſis, nonus, decimus tertius, &c.

Secunda proprietas. Si quicunque terminus in ſe ducatur in continua proportione, tantum aberit productus ab illo, quantum ipſe abeſt ab vnitate. Vt in progreſſione prima, quartus, hoc eſt, 8 tantum abeſt ab vnitate, quantum ipſe abeſt à 64. Vnde manifeſtum eſt, non eſſe neceſſe, vt omnes intermedij termini inueniantur. Vt ſi in prima progreſſione inuenire velim terminum vigeſimum ſeptimum, duco in ſe decimum quartum, nempe 8192, producoq; 67108864 hic in ſe ductus progignit quinquageſimum tertium.

Tertia proprietas. Datis tribus terminis quibuſcunque progreſſionis continuæ, erit quadratum medij, æquale producto extremorum.

Quarta. Datis in continua progreſſione quatuor quibuſcunq; terminis, erit productum mediorum, æquale producto extremorum. Idem in diſcreta verum eſt, ſi fuerit, vt primus ad ſecundum, ita tertius ad quartum. *Vnde ſi in regula proportionum productum primi, & quarti æquale fuerit producto ſecundi & tertij, operatio legitima erit.*

Quinta. Quadratum cuiuſcunque numeri progreſſionis continuæ, eſt æquale producto duorum æqualiter ab ipſo diſtantium.

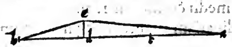
De progreſſione Muſica.

Muſica

Muſica progreſſio eſt talis trium numerorum ſeries, vt quæ eſt proportio maximi, & minimi, ea ſit differentiarum maximi & medij, & medij atque minimi. Vt in his tribus numeris videre licet, 6. 4. 3. Differentia maximi, & medij eſt 2; medij & minimi 1. inter quos eſt proportio dupla, qualis etiam eſt inter 6 & 3 maximum, & minimum.

Reperiuntur tres muſicè proportionales, ex tribus arithmeticè proportionalibus, ſi primus arithmeticè proportionalis in ſecundũ, & tertium ſecundus verò in tertiũ ducatur. Ita ex his tribus 2. 4. 6. arithmeticè proportionalibus, reperiuntur hi tres 8. 12. 24. muſicè proportionales. Quòd autem eiuſmodi numeri ſint muſicè proportionales, indè cõſtat, quod in pleriſq; reperiantur tres illæ proportiones, ex quib. tota Muſica pendet; nimirũ dupla, ſiue διὰ πασῶν; quæ octauam conſtituit: ſeſquialtera, ſiue διὰ πέντε, quæ quintã cõſtituit: ſeſquitertia, ſiue διὰ τεσσάρων, quæ conſtituit quartam. Cernuntur enim in his numeris 6. 4. 3. dictæ proportiones: nam inter 6 & 3 eſt dupla: inter 6 & 4 ſeſquialtera: inter 4 & 3 ſeſquitertia. At in his 24. 12. 8 cernuntur tripla, quæ eſt compoſita ex dupla, & ſeſquialtera, eſtq; apud muſicos duodecima: dupla, & ſeſquialtera, hoc eſt, octaua, & quinta. Quod vt melius intelligas, noueris apud muſicos eſſe vndecim conſonantias, non quod plures non ſint, cum infinitæ ſint; ſed quod his vndecim tãtum in cantilenis componendis vtantur muſici. Sunt autẽ iſtæ 1. 3. 5. 6. 8. 10. 12. 13. 15. 19. 20; quarum hæ ſex 1. 5. 8. 12. 15. 19. ſunt perfectæ: Hæ quinq; 3. 6. 10. 13. 20 imperfectæ. Componitur tertia ex 32 & 27. quinta ex 3 & 2. Sexta ex 27 & 16. Octaua ex 2 & 1. Deci-

ma ex 64 & 27. duodecima ex 3 & 1. decima tertia ex 27 & 8. decima quinta ex 4 & 1. decima nona ex 6 & 1. vigeſima ex 27 & 4; quarta ex 4 & 3. Tonus ex 9 & 8. Semitonium maius ex 2187 & 2048; ſemitonium minus ex 256 & 243. &c. Quæ dicta ſunt fortaſſis melius intelliges ex hac figura. In qua



ſpacium in tot partes ſit diuiſum, quot faciunt duo numeri conſonantiam cõponentes, numereturq; ex b in d minor numerus; ex d in a maior; atque ex d fulcrum erigatur; nam ſi tangantur chordæ a e, e b. edetur illa conſonantia, quam numeri illi componunt. Exemplum. Octaua componitur ex 2, & 1. Si ergo a b a in d 2; à d in b vnum numeretur, erigaturq; ex d fulcrum, & vtraque pars chordæ a e, e b tangatur, edetur octaua. Si verò a d in tres, d b in duas diuidatur edetur quinta, &c.

Aduertendum etiam eſt, duos illos numeros, ex quibus conſonantiæ componuntur, per modum fractionis poni; hoc modo $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$. Iam ſi conſonantiæ conſonantia addenda ſit, ducantur tam ſuperiores, quam inferiores in ſe; ita vt ex his $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, octaua nimirum, & quinta, fiat hæc $\frac{2}{6}$, ſiue $\frac{1}{3}$, nempe duodecima. Si verò vna ab altera ſubtrahenda ſit, fiat id per crucem. Vt ſi hæc $\frac{2}{3}$ ex hac $\frac{1}{2}$, nempe quinta ex octaua ſit ſubtrahenda, remanebit hæc $\frac{3}{4}$, ſcilicet quarta. Sed hæc muſicis relinquimus.

Articvlvs V.

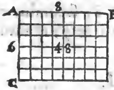
De numero figuras geometricas repræſentante.

Figu-

Figuræ geometricæ numeris repræſentatæ, ſunt aut planæ, aut ſolidæ. Planæ ſunt, trilateræ, quadrilateræ, & multilateræ. Solidæ, ſunt cubi, parallelepipeda, columnæ, pyramides, &c.

DE NVMERIS planis.

Numerus planus eſt, qui gignitur ex ductu duorum numerorum in ſe. Vt ſi 8 in 6 ducantur, gignentur 48, qui numerus planus dicitur.



Multiplicantes, vocantur latera. Vt ſi in figura BC, latus AB ponatur 8, AC 6 pedum; figura ipſa dicetur plana. Habet hæc figura 48 cellulas, quæ omnes ſunt quadratulæ, & dicuntur pedes quadrati, ſi quidem latera pedibus menſurentur.

Numerus quadratus eſt, qui ex numero in ſeipſum ducto creatur, cuiuſmodi ſunt 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100. &c. Nam primus ex binario in ſeipſum ducto creatur, ſecundus ex ternario, tertius ex quaternario.

Sunt præter quadratos, numeri triangulares, pentagoni, hexagoni, heptagoni, octogoni. Triangulares fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticę ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt vnitas. Ita ex 1 & 2 fit 3; ex 1. 2. 3 fit 6; ex 1. 2. 3. 4. fit 10. &c.

Quadrati fiunt ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt binarius. Ita ex 1 & 3 fit 4. Ex 1. 3. 5. fit 9. Ex 1. 3. 5. 7. fit 16, &c.

Pentagoni creantur ex ſumma progreſſionis arithme-

ticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt ternarius; Ita ex 1. 4. fit 5; ex 1. 4. 7 fit 12. ex 1. 4. 7. 10 fit 22. &c.

Hexagoni creantur ex ſumma progreſſionis arithmeticæ ab vnitate incipientis, cuius differentia eſt quaternarius. Ita ex 1, 5. fit 6. Ex 1. 5. 9. fit 15. Ex 1. 5. 9. 13 fit 28. &c.

Heptagoni fiunt ex ſimili progreſſione, cuius differentia eſt 5; octogoni ex illa, cuius differentia eſt 6. &c.

Numerus altera parte longior eſt, qui producitur à duobus ſola vnitate differentibus, cuiuſmodi ſunt. 2. 6. 12. 20. 30. 42. primus naſcitur ex 1 & 2; ſecundus ex 2 & 3; tertius ex 3 & 4; quartus ex 4 & 5; quintus ex 5 & 6 &c.

Annotatio I.

Radices	△	□	Pentagoni	Hexagoni
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	9	12	15
4	10	16	22	28
5	15	25	35	45
6	21	36	51	66
7	28	49	70	91
8	36	64	92	120
9	45	81	117	153

A B

Ex hac tabula apparet.

Primo. Pentagonũ generari ex quadrato collaterali, & triangulo præcedente.

Secundò, Hexagonum ex quadrato collaterali, & duplo præcedẽtis trianguli.

Tertiò. Omnes lineas transuerſales eſſe progreſſiones

nes arithmeticas. Ita vides in linea *A B*, ſi ad hexagonum 15 addantur 3, fore heptagonum; ſi ad hunc 3, fore octogonum; ſi ad hunc 3, fore enneagonum, &c.

Quartò. Si ex duplo quadrati ſubtrahatur radix, reſtare collaterale Hexagonum.

Quintò. Semiſſem ſummæ Hexagoni, & radicis, eſſe quadratum.

Sextò. Duplum quadrati mutilatum triangulo collaterali, relinquere Pentagonum collaterale.

Septimò. Datis tribus triangularibus continuis, ſummam extremorum vnitate excedere duplum medij.

Octauò. Datis quatuor triangularibus continuis, ſummam extremorum binario excedere ſummam mediorum.

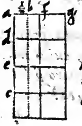
Nonò. Duos continuos triangulares conſtituere quadratum.

Decimò. Summam quadratorum duorum triangularium continuorum, conſtituere triangularem. Sint duo triangulares continui 3 & 6; eorum quadrata 9 & 36, faciunt 45, triangularem nonum.

Vndecimò. Datis tribus triangularibus continuis, productum extremorum cum medio, facere quadratum medij.

Duodecimò. Datis quatuor triangularibus continuis, productum extremorum, cum medijs vnitate excedere productum mediorum. Multa alia deduces ex hac tabula ingenioſus lector.

ANNOTATIO II.



Si quis miretur, cur, quando fractus per fractum minus vtroq; fracto, quando vero fractus per integrum multiplicatur, minus integro proueniat, is rem hinc facile intelliget. Quando *a f* duco in 3, nempe in *a d*, *d e*, *e c* producun-

tur

tur tres cellulæ: quando duo, nimirum af, fg duco in 3, ad, de, ec producuntur 6 cellulæ: quando vero dimidium duntaxat ab duco in ad, de, ec, producuntur tantum tres dimidiæ cellulæ, hoc eſt, $1\frac{1}{2}$: Patet ergo cur, quando duco $\frac{1}{2}$ in 3 producatur minus quam 3, hoc eſt tantum $1\frac{1}{2}$.

Quando vero fractum per fractum, aut integrum per fractum diuido, cur plus proueniat, ſic oſtendo. Toties vnitas continetur in quoto, quoties diuiſor in diuidendo. Vt cum diuido 12 per 4, proueniunt 3, eo quod 4 in 12 ter cōtineantur. Ergo etiam cum diuido 3 per $\frac{1}{2}$, proueniunt 6; ideo, quod vt $\frac{1}{2}$ in 3 ſexies continetur; ita etiam vnitas in quoto ſexies contineri debeat. Idem de multiplicatione oſtendo. Cum enim qualis eſt proportio vnius multiplicantis, & vnitatis, talis ſit producti, & alterius multiplicantis, ſi multiplicentur 3 per $\frac{1}{2}$, ſitq; vnitatis & $\frac{1}{2}$ proportio dupla; erit quoq; 3, & producti dupla, ac proinde productum erit $1\frac{1}{2}$, minus quam 3, alter multiplicantium.

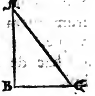
Annotatio III.

Poſſunt ex planorum numerorum notitia huiuſmodi quæſtiunculæ deduci. Eſt area circularis, cuius diametrus eſt 100 paſſuum, area 20 iugerum. Quæro ſi diametrus ſit 350 paſſuum, quot iugerum futura ſit area? Accipe pro diametris quadrata diametrorū, hoc modo, 10000 | 20 | 122500, & reperies, operatione abſoluta, 245 iugera.

Eodem modo agendum eſt, ſi area ſit quadrata, pentagona, hexagona, &c. Sit enim area quadrata, cuius latera ponantur 30 paſſuum, area 12 iugerum: quæro ſi latera ponantur 100 paſſuum, quot iugerum ſit area? Accipe quæ

quadrata laterum, hoc modo, 900 | 12 | 10000, & reperies, operatione abſoluta, 133⅓ iugera.

Idem in triangulis, & figuris oblongis ſimilibus verum eſt. Sit enim trianguli rectanguli, abc latus ab, 40, bc 30 paſſuum; area 20 iugerum. Quæro ſi ab ſit 120, bc 90 paſſuum, quanta futura ſit area? Quadratum vtriuſq; lateris minoris trianguli eſt 4900, vtriuſque maioris 44100: ergo ſic ſtat exemplum. 4900 | 20 | 44100, operatione abſoluta reperies aream maioris trianguli 180 iugerum. Demonſtratio pendet ex 19 & 20 ſexti, & ex 2 duodecimi Euclidis.



DE NVMERO SOLIDO.

Numerus ſolidus eſt, qui ex tribus in ſe multiplicatis gignitur, vt. ex 2. 3. 4 fit 24. Solidus numerus, aut eſt cubus, aut parallelepipedum, aut pyramis, aut columna &c. Cubus eſt, cum tres æquales numeri in ſe ducuntur; vel cum idem numerus in ſe, poſtea in productũ ducitur, veluti ſunt numeri 8. 27. 64. 125. 216. &c. Primus fit ex 2; ſecundus ex 3; tertius ex 4, quartus ex 5, quintus ex 6. Parallelepipedum fit ex duobus, aut tribus; ſi ex duobus, erit baſis quadrata; ſi ex tribus oblonga; poſſunt baſes quoque eſſe triangulares, hexagonæ, pentagonæ, &c.

Pyramis, ſi habeat triangularem baſim, fit ex aggregato omnium triangulorum, Quadratæ ex ſumma quadrato-

dratorum. Pentagonæ ex pentagonorum. Hexagonæ ex hexagonorum, &c.

Columnæ, cuiuſcunq; generis ſint, fiunt ex ductu cuiuſcunque numeri in ſuperficiem illius ſpeciei, cuius ſunt ipſæ columnæ, vt triangularis in triangulum, & numerum quemcunq; quadratæ in quadratum, & numerum quemcunque. Pentagonæ in pentagonum, &c. Vide hac de re Franciſcum Maurolycum initio lib. primi.

Annotatio I.

Sequuntur ex numeris ſolidis hæc. Primò. Si duorum triangularium numerorum continuorum quadratum minoris ex quadrato maioris tollatur, reſtare cubum, cuius radix eſt radix maioris trianguli. Secundò, duos primos impares poſt vnitatem, nempe 3 & 5 conſtituere cubum binarij. Tres ſequentes 7. 9. 11, cubum ternarij. Quatuor ſequentes 13. 15. 17. 19, cubum quaternarij, &c. Quod ſi quis ſcire velit, qui impares cuiuſcunq; radicis cubum conſtituant, deducat ex quadrato illius numeri numerum vnitate minorem, & habebit minimum imparem, eundem numerum eidem quadrato addat, & habebit maximum imparem. Exemplum. Volo ſcire, qui duodecim impares conſtituant cubum duodenarij. Quadrato duodenarij addo, & ab eodem tollo 11, numerum vnitate minorem duodenario, & reperio duos extremos impares 133 & 155; horum cum 10 intermedijs ſumma eſt 1728, & tantundem etiam facit cubus duodenarij.

Anno-

ANNOTATIO II.

Ex cognitione cubi tales quæſtiunculæ ſolui poſſunt. Fiſtula ænea, cuius foramen eſt vnius digiti, eijcit globum ¾, vnius libræ, quæro ſi foramen ſit 4 digitorum, quot librarum eſſe debeat globus? Duc digitos ad cubos, & ſtabit ſic exemplum 1 | ¾ | 64, facta operatione reperies 48 libras.

Alia. Eſt cubus, cuius latera ſunt 6 pedum, capacitas 800 vrnarum; quæro ſi latera ſint 4 pedum, quot vrnarum ſit capacitas? Accipio pro lateribus cubos laterum, hoc modo. 216 | 800 | 64 reperioq́; operatione facta, vrnas 237 $\frac{1}{27}$.

CAPVT V.

DE RADICVM EXTRActionibus.

Radices ſunt numeri ſecundum naturalem ordinem ab vnitate procedentes, nimirum 1. 2. 3. 4. 5. 6. &c. vt in ſecunda columna ſub titulo ℞ cernis. Quadrati fiunt ex radicibus in ſe ductis, & notantur ſigno q. Cubi ex ductu radicis in quadratū, & notantur ſigno ce. Biquadrati ex cubo in radicem, & notantur ſigno qq. ſuperſolidi primi ex biquadrato in radicem, & notantur ſigno ß. Quadrati ex ſuperſolido primo in radicem, & notanter ſigno q ce &c.

TABV-

TABVLA RADICVM ET GRADVVM.

	A	B							
0	2	1	3	4	5	6	7	8	D
1	R	q	ce	qq	β	qce	βb	qqq	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	4	8	16	32	64	128	256	
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	Q
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	
1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	
1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	
1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	
3	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	

B F				
9	10	11	12	D
ce ce	qβ	βc	qqce	
1	1	1	1	
512	1024	2048	4096	
19683	59049	177147	531441	
262144	1048576	4194304	16777216	Q
1453125	9765625	48828125	244140625	
10077696	60466176	362797056	2176782336	
40353607	282475249	1977326743	13841287201	
134217728	1073741824	8589934592	68719476736	
387420489	3486784401	31381059609	282429536481	
1000000000	10000000000	100000000000	1000000000000	

In ſeptima columna ſunt ſuperſolidi ſecundi ßb. In octaua triquadrati q q q. &c. Vt tum characteres, tum gradus in infinitum extendas, voco numeros ſupremæ columnæ tranſuerſæ C D graduales; perpendicularis A B, Radices. Characteres ergo extenſurus, diuide numerum gradualem datum in numerum quemcumq;, diuiſoremque, & quotum quære in numeris gradualibus, atque characteres illis ſubiectos coniunge, & habebis characterem numeri gradualis dati.

Exemplum. Cupio habere characterem numeri gradualis huius 12. diuido illum per numerum quemcumque 3, & proueniunt 4. characteres numerorum 3, & 4, nempe ce, & qq, coniungo, & habeo characterem numeri 12, hunc q q ce characteri numerorum primorum, qui ſunt 5. 7. 11. 13. 17 &c. eſt hic ß, cui addantur literæ B, C, D &c. characteri numeri 5 addi deberet A, ſed communiter nulla addi ſolet.

Gradus extenſurus, duc graduum datum in radicem reſpondentem.

Exemlpum. Volo extendere gradum hunc 4. columnæ perpendicularis E F, duco illum in radicem reſpondentem, 2, & produco 8, gradum ſequentem; hoc rurſus ducto in 2, produco gradum hunc 16. &c.

Quod ſi gradus remotos, non notis intermedijs, habere cupias, diuide numerum gradualem per numerum quemcunque, quotum, & diuiſorem quære in columna tranſuerſa C D, & vel quotum iuxta characterem diuiſoris, vel diuiſorem iuxta characterem quoti multiplica, & reperies gradum quæſitum. Exemplum. Cupio habere gradum duodecimum radicis 4 ſeu columnæ P Q. Diuido 12 per 3, proueniunt 4. character &

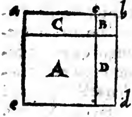
ſ eſt ce, character 4 eſt qq. Aut ergo 64 cubum radicis 4, duco ad biquadratum; aut 256 biquadratum eiuſdem radicis ad cubum, vtrum enim fecero, repe-rero 16777216. Reperiuntur ijdem gradus, ſi numerus gradualis diuidatur in quotcumque numeros, & gradus illis numeris ſubiecti in ſe ſigillatim ducantur. Vt ſi 12 diuidantur in 3. 4. 5. & gradus illis in columna. V. G. P Q, ſubiecti, nimirum 64. 256. 1024. in ſe ducantur. Nam ſi duxero 64 in 256 produco 16384; ſi hũc numerũ in 1024 produco 16777216, &c.

ARTICVLVS I.

TABVLAM PRO EXtrahendis radicibus conſtruere.

Primo ante oculos nobis ponamus prop. 4. ſecundi Euclid. quæ ſic habet.

Quando numerus in duas partes vtcumq; diuiditur, erunt partium quadrata, vna cum duobus partium rectangulis, equalia quadrato totius.



Vt ſi numerus 12 diuidatur in 10 & 2, erit quadratum maioris partis 100, minoris 4, quod ex 10 in 2 fit rectangulum bis acceptum, 40; ſed 100, 4, & 40 faciunt 144, quantum etiam facit quadratum totius lineæ a b, ſeu 12. In ſchemate adiecto, linea a b in c eſt vtcnmque diuiſa: quadratum partis a c eſt ſpatium A; partes b c, ſpatium B, rectangula

gula ſub partibus a c, c b contenta, ſunt C & D: at hæc quatuor A, B, C, D æquantur totius lineæ a b ſpatio. Vocetur pars a c, A: c b, B: & ſit A + B tota linea (ſignum hoc + ſignificat plus) totum quadratum ad eſt A q + A 2 in B + B q: nam A q ſignificat ſpatium A; A 2 in B ſignificat ſpatia C, D: B q, ſpatium B. Fit autem hæc formula A q + A 2 in B + B q, ex ductu A + B in ſe. Nam A in A facit A q: A in B, facit A in B ſemel. Rurſus B in A facit A in B ſemel. Deniqúe B in B facit B q. Quando enim ducitur A in A, aut B in B, mutatur character minor in proximè maiorē, vq in ce: ce in qq, &c. Quãdo verò ducitur A in B; aut B in A character non mutatur, ſed ex vtroq; fit A in B. Ergo hæ duæ formulæ coniunctæ faciunt A q + A 2 in B + B q. Cũ .n. A in B bis ſit poſitũ, debent ad A apponi 2, hoc modo, A 2 in B.

A + B
A + B
A q + A in B
A in B + B q
A q + A 2 in B + B q

A q + A in B
A in B + B q

1. A in B.
2. A q + A 2 in B + B q.
3. A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce.
4. A qq + A ce 4 in B + A q 6 in B q + A 4 in B ce + B qq.
5. A β + A qq 5 in B + A ce 10 in B q + A q 10 in B ce + A 5 in B qq + B β.
6. A q ce + A β 6 in B + A qq 15 in B q + A ce 20 in B ce + A q 15 in B qq + A 6 in B β + B q ce.
7. A β 6 + A q ce 7 in B + A β 21 in B q + A qq 35 in B ce + A ce 35 in B qq + A q 21 in B β + A 7 in B q ce + B β 6.

Pro tertia formula, quæ eſt pro radice cubica, duæ

Aq + A 2 in B + Bq, in A + B hoc modo. Ex A in A q, fit A ce: ex A in A 2 in B, fit A q 2 in B: Ex A in Bq, fit A in B q. Item, ex B in A q fit A q in B: ex B in A 2 in B, fit A 2 in B q: ex B in B q, fit B ce. Formulæ duabus lineis incluſæ, faciunt A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce. Vt in appoſita formula apparet. Nam A q 2 in B, & Aq in B faciunt A q 3 in B: & A in Bq, cum A 2 in B q, facit A 3 in Bq. Eodem modo conſtructæ ſunt reliquæ formulæ. Nam quarta facta eſt ex ductu tertiæ in A + B: quinta ex ductu quartæ in A + B, &c.

A q + A 2 in B + B q
A + B
A ce + A q 2 in B + A in B q
A q in B + A 2 in B q + B ce
A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce

Articulus II.

Omnis generis radices extrahere.

Vt facilius radices extrahantur, notentur hæc. Primò ſub numero primo verſus dextram, ponẽdum eſſe punctum. Deinde in extractione radicis quadratæ, vno prætermiſſo, ſub tertio, quinto, ſeptimo, &c. In extractione cubicæ, duobus prætermiſſis, ſub quarto, ſeptimo, decimo, &c. In biquadratæ, tribus prætermiſſis ſub quinto, nono, decimotertio, &c.

Secundò, in formulis ſupra poſitis, primum A cum ſuo charactere, tantum in primo quoto vſurpari; pro reliquis nullam amplius eius rationem haberi.

Ter-

Tertiò. Quotum inuentum, ſiue vnam, ſiue plures habuerit figuras, vocari A, inueniendum B.

Quartò, pro noui diuiſoris inuentione, inuentum quotum eſſe multiplicandum, vt character, & numerus poſt A poſiti, indicant.

His notatis extrahemus ex hoc numero 4692798016 radicem quadratã, hac vſi formula $Aq + A\ 2\ in\ B + Bq$. Notatis itaque punctis, video in ſecunda columna tabulæ radicum, & graduum, quis numerus quadrat° proxime minor ſit numero vltimi membri verſus ſiniſtram, nimirum numero hoc 46, inuenioque 36, cuius radicem 6 pono poſt lunulam, & 10, quæ ſubtractis 36 ex 46, reſtãt ſcribo ſupra 46, vt in prima apparet operatione. Pro alio diuiſore, cum in formula habeam + A 2, duco quotum 6 A, in 2, & habeo nouum diuiſorem 12. Cuius priorem figuram 2 pono poſt quartum punctum, nempe ſub 9, alteram deinceps ſiniſtrorſum, & video quoties 1 in 10 contineatur: continetur ſæpius, quam octies, poſſum tamen propter ſequentem quoti figurã non niſi 8 accipere. Et quia habeo in formula A 2 in B, duco duplum quoti 6 A, in 8 B, quorum iam inuẽtum, & produco 96. Rurſus quia in formula habeo + B q, addo quadratum quoti 8 B, nempe 64, ad 96, hoc modo, & conflo 1024 quibus ex 1092 ſubtractis reſtant 68, vt in ſecunda operatio-

Operatio 1.

```
10
4692798016 (A
12            6
```

Operatio 2.

```
1068
4692798016 (AB
1236          68
1
```

```
  96
  64
----
1024
```

 peratio-

peratione apparet: Pro tertio diuiſore, cum habeam in formula A 2, duco totum quotũ 68 A in 2, & produco 136, diuiſorem nouum, cuius figura prima poſt tertium punctum, nempe ſub 7 poſita, & reliquis deinceps, vt in ſecunda vides operat. video, quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies.

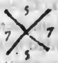
Repono 5 ad quotum: Et, quia habeo in formula, A 2 in B, duco 5 B, in diuiſorẽ 136, & produco 680, quibus addo quadratũ quoti 5 B, quod habeat formula + B q, hoc modo, ſummam 6825 ſubtraho ex 6879, & reſtant 54, vt in tertia operatione cernis.

Operatio 3.

106854
46927798016 (A 68 | B 5
123670
113

680
25
6825

Pro alio diuiſore duplico totum quotum hactenus inuentum, nimirum 685, & inuenio 1370, vt in tertia apparet operatione, collocatoq; o ſub 8 poſt ſecundum punctum, & reliquis figuris deinceps ſiniſtrorſum, video nihil accipi poſſe: pono ergo ad quotum o, & paro nouum diuiſorem, vt prius, qui erit 13700. Hoc diuiſore collocato, vt in quarta operatione apparet, video quoties 1 in 5 contineatur, cõtinetur quater: poſitis igitur 4 ad quotum, duco totum diuiſorẽ in 4 B, & produco 54800, quibus



Operatio 4.

106854
46927798016 (A 6850 | B 4
12367000
11337
1

addo

addo quadratum quoti 4 B, hoc modò ſummam 5 4 8 0 1 6 ſubtraho ex 548016, & reſtat nihil, vt in quarta operat. apparet.

54800
16
548016

Vulgari modo ſic extraho radicem quadratam.

Operatio 1.

Noto puncta, vt prius, & video quis numerus quadratus ſit proxime minor numero vltimi membri 46, & video 36; pono ergo eius radicem 6 ad quotum, vt ſupra.

2
10
469279801 6(68
128

Operatio 2.

Deinde duplum quoti nempe 12 aſſumo pro nouo diuiſore quem pono, vt prima habet operatio, & video quoties 1 in 10 contineatur, continetur octies: 8 ergo pono, & ad quotum, & ante diuiſorem 12 ſub 2, & dico octies 2 ſunt 16, quibus ex 29 ſubtractis, reſtant 13; vt in ſecunda apparet operat. Dico iterum octies 8 ſunt 64, quibus ex 132 ſubtractis, reſtant 68, vt tertia habet operatio. Pro nouo diuiſore aſſumo duplū quoti 68, quod eſt 136, quem pono, vt tertia habet operatio, & video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies: 5 ergo & ad quotum, & ante diuiſorem 136 ſub 9 pono, vt in ter-

1
2
103
4692798016(68
128

Operat. 3.

1
26
638
469279801 6(685
12865
13

tia operatione, & progredior per omnia, vt hactenus, &c.

Secundum exemplum radicis cubicæ ſit hoc. Volo ex numero hoc 1010644583 12 extrahere radicem cubicam. Notatis punctis video in tabula radicum, quis cubus ſit proxime minor numero vltimi membri 101, & video eſſe cubum 64, cuius radicem 4 pono poſt lunulam, & ſubtractis 64 ex 101. reſiduum 37, pono ſupra 101, vt in prima operat. apparet. Diuiſorem iam paro hoc modo. In formula habeo + A q 3 : quadratũ ergo quoti 4 A, iam inuenti, duco in 3, & produco 48. Præterea in formula habeo + A 3 : ergo quotum 4 A duco in 3, & produco 12. Hos itaq; duos numeros 48, & 12, ſic addo 48 / 12 & conflo 492, diuiſorem, cuius figuram 2 pono ante punctum tertium ſub 6, reliquas deinceps ſiniſtrorſum, vt in prima apparet operat. & video quoties 4 in 37 contineantur: continentur propter ſequentes figuras, tantum ſexies: pono ergo 6 ad quotum: & quia in formula habeo + A q 3 in B, duco 6 B, quotum in triplum quadrati quoti 4 A, nempe in 48, & produco 288. Rurſus quia in formula habeo + A 3 in B q, duco triplum quoti 4 A, nempe 12 in quadratum quoti 6 B, nempe in 36, & produco

Operatio 1.

37
1010644583 12 (A 4
492

Operatio 2.

3
37728
1010644583 12 (AB 46
492618
63

duco

duco 432. Deniq; quia in formula habeo + B ce, accipio 6 B, quoti cubum 216: atque hos tres numeros vt hic apparet, addo, & conflo 33336 quibus ex 37064 ſubtractis, reſtant 3728, vt in ſecunda operat. apparet. Paro iterum nouum diuiſorem, hoc modo. In formula habeo + A q 3, quadratũ ergo totius quoti hactenus inuenti 46 A, duco in 3. Duco quoq. 46 A quotũ in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 6348, 138 quos ſic addo & conflo 63618, diuiſorem nouum,

288
432
216
―――
33336

6348
138
―――
63618

quem colloco, vt ſecunda monſtrat operatio, hoc eſt, pono figuram primam 8 poſt ſecundum punctum ſub 5, & reliquas deinceps. Qua collocatione facta, video quoties 6 in 37 contineantur: continentur propter ſequentis diuiſoris figuras, tantum quinquies: pono ergo 5 ad quotum, qui eſt quotus 5 B. Et quia in formula habeo + A q 3 in B, & + A 3 in B q, & B ce, duco A q 3, hoc eſt 6348 in 5: 138 in 25, & produco 31740 & 3450, quos numeros, & cubum ipſius 5 B quoti noui addo, hoc modo & conflo 3208625, quibus ex 3728458 ſubtractis, reſtant 519833, vt in tertia operat. apparet. Denique pro vltimo diuiſore duco quadratum totius quoti 465 A, hactenus inuenti

Operatione 3.

3519
37728833
101064458316 (A 64 | B 5
492618145
63488
6

31740
3450
125
―――
3208625

uenti in 3, quod in formula habeam A q 3 ; Eundem quotum duco in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 648675, 1396, quibus ſic additis conflo 6488145, diuiſorem nouum, quo collocato, vt in tertia operatione cernis, video quoties 6 in 51 contineantur; continentur octies : erit igitur 8 quotus B, quem ſi duxero in 648675, & eius quadratum in 1395, produco 5189400, & 89280: quos numeros, & quoti 8 B cubum, ſi addidero hoc modo conflabo 519833312, quo numero ex reſiduo 519833312 ſubtracto, reſtat nihil. Radix ergo cubica numeri propoſiti 110644583112, eſt 4658.

648675
1395
6488145

5189400
89280
512
519833312

Operat. 4.



3819
37728833
101064458312 (A | B
492618145 465 | 8
63488
6

Exemplum tertium radicis ſuperſolidi primi, ſit hoc 1099511627776. Notatis punctis, video in tabula radicum, quod ſuperſolidum primum proximè minus ſit numero vltimi membri 109, & reperio 32, cuius radicem 2, pono ad quotum, & ſubtraho 32 ex 109,

Operatio 1.

77
1099511627776 (A | B
88410 2 | 5

atque

atque reſiduum 77, pono ſupra 109, vt in prima operatione apparet. Pro primo diuiſore accipio formulam quintam, in qua habeo + A qq 5: quotum ergo 2 A, duco ad biquadratum, quod eſt 16, quo ducto in 5 fiunt 80. Secundò habeo + A ce 10; ducto ergo cubo ipſius 2 A, ſcilicet 8 in 10, produco 80. Tertiò habeo + A q 10: ergo quadratum ipſius 2 A duco in 10, & produco 40. Quartò habeo A 5; ducto 2 A in 5 produco 10. Hos igitur quatuor numer. 80. 80. 40. 10, addo hoc modo, & conflo 88410, diuiſorem primum, eius primam figuram 0, pono proxime poſt ſecundum punctum, nempe ſub 1, & reliquas ſiniſtrorſum deinceps, & video quoties 8 in 77 habeantur, habita ratione ſequentiũ figurarũ, habentur quinquies: ergo 5 ad quotũ poſitis, duco primo 5 in 80, nimirum in biquadrati quoti 2 A quintuplũ, eo quod formula habeat A q q 5 in B, & produco 400. Secundò, duco quadratum quoti 5 B in decuplum cubi quoti 2 A, ſcilicet 25 in 80, quod formula habeat A ce 10 in B q & produco 2000. Tertiò, duco cubũ quoti 5 B, in decuplum quadrati quoti 2 A, nempe 125 in 40, quod formula habeat A q 10 in B ce, & produco 5000. Quartò, duco biquadratum quoti 5 B in quintuplum quoti 2 A, quod formula habeat A 5 in B q q, & produco 6250. Quintò, cum in formula habeam Bß, addo his numeris 400. 2000. 5000. 6250 ſuperſolidum primũ ipſius 5 B, quoti, nempe 3125, hoc modo, & produco 6565625, quibus ex 7795116 ſubtractis, reſtant 1229491. Tertium quotum 6 reperies, ſi cum inuento quoto 25 A, progreſſus fueris, vt ante factum eſt.

80
80
40
10
88410

400
2000
5000
6250
3125
6565625

Primò

	A	B							
0	2	1	3	4	5	6	7	8	D
1	℞	q	ce	qq	ß	qce	ßb	qqq	
1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	2	4	8	16	32	64	128	256	
1	3	9	27	81	243	729	2187	6561	
1	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	Q
1	5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	
1	6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	
1	7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	
1	8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	
1	9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	
3	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000	100000000	

B F

9	10	11	12	D
cece	qß	ßc	qqce	
1	1	1	1	
512	1024	2048	4096	
19683	59049	177147	531441	
262144	1048576	4194304	16777216	Q
1453125	9765625	48828125	244140625	
10077696	60466176	362797056	2176782336	
40353607	282475249	1977326743	13841287201	
134217728	1073741824	8589934592	68719476736	
387420489	3486784401	31381059609	282429536481	
1000000000	10000000000	100000000000	1000000000000	

In ſeptima columna ſunt ſuperſolidi ſecundi ßb. In octaua triquadrati q q q. &c. Vt tum characteres, tum gradus in infinitum extendas, voco numeros ſupremæ columnæ tranſuerſæ C D graduales; perpendicularis A B, Radices. Characteres ergo extenſurus, diuide numerum gradualem datum in numerum quemcumq;, diuiſoremque, & quotum quære in numeris gradualibus, atque characteres illis ſubiectos coniunge, & habebis characterem numeri gradualis dati.

Exemplum. Cupio habere characterem numeri gradualis huius 12. diuido illum per numerum quemcunque 3, & prouenlunt 4. characteres numerorum 3, & 4, nempe cę, & qq, coniungo, & habeo characterem numeri 12, hunc q q cę characteri numerorum primorum, qui ſunt 5. 7. 11. 13. 17 &c. eſt hic ß, cui addantur literæ B, C, D &c. characteri numeri 5 addi deberet A, ſed communiter nulla addi ſolet.

Gradus extenſurus, duc graduum datum in radicem reſpondentem.

Exemlpum. Volo extendere gradum hunc 4. columnæ perpendicularis E F, duco illum in radicem reſpondentem, 2, & produco 8, gradum ſequentem; hoc rurſus ducto in 2, produco gradum hunc 16. &c.

Quod ſi gradus remotos, non notis intermedijs, habere cupias; diuide numerum gradualem per numerum quemcunque, quotum, & diuiſorem quære in columna tranſuerſa C D, & vel quotum iuxta characterem diuiſoris, vel diuiſorem iuxta characterem quoti multiplica, & reperies gradum quæſitum. Exemplum. Cupio habere gradum duodecimum radicis 4 ſeu columnæ P Q. Diuido 12 per 3, proueniunt 4. charactor &

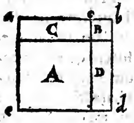
3 eſt ce, character 4 eſt qq. Aut ergo 64 cubum radicis 4, duco ad biquadratum; aut 256 biquadratum eiuſdem radicis ad cubum, vtrum enim fecero, repeтero 16777216. Reperiuntur ijdem gradus, ſi numerus gradualis diuidatur in quotcumque numeros, & gradus illis numeris ſubiecti in ſe ſigillatim ducantur. Vt ſi 12 diuidantur in 3. 4. 5. & gradus illis in columna. V. G. P Q, ſubiecti, nimirum 64. 256. 1024. in ſe ducantur. Nam ſi duxero 64 in 256 produco 16384; ſi hũc numerũ in 1024 produco 16777216, &c.

ARTICVLVS I.

TABVLAM PRO EXtrahendis radicibus conſtruere.

Primo ante oculos nobis ponamus prop. 4. ſecundi Euclid. quæ ſic habet.

Quando numerus in duas partes vtcumq; diuiditur, erunt partium quadrata, vna cum duobus partium rectangulis, equalia quadrato totius.



Vt ſi numerus 12 diuidatur in 10 & 2, erit quadratum maioris partis 100, minoris 4, quod ex 10 in 2 fit rectangulum bis acceptum, 40; ſed 100, 4, & 40 faciunt 144, quantum etiam facit quadratum totius lineæ a b, ſeu 12. In ſchemate adiecto, linea a b in c eſt vtcnmque diuiſa: quadratum partis a c eſt ſpatium A; partes b c, ſpatium B, rectangula

gula ſub partibus a c, c b contenta, ſunt C & D: at hæc quatuor A, B, C, D æquantur totius lineæ a b ſpatio. Vocetur pars a c, A: c b, B: & ſit A + B tota linea (ſignum hoc + ſignificat plus) totum quadratum ad eſt A q + A 2 in B + B q: nam A q ſignificat ſpatium A; A 2 in B ſignificat ſpatia C, D: B q, ſpatium B. Fit autem hæc formula A q + A 2 in B + B q, ex ductu A + B in ſe. Nam A in A facit A q: A in B, facit A in B ſemel. Rurſus B in A facit A in B ſemel. Deniqne B in B facit Bq. Quando enim ducitur A in A, aut B in B, mutatur character minor in proximè maiorē, vq in c: c in qq, &c. Quãdo verò ducitur A in B; aut B in A character non mutatur, ſed ex vtroq; fit A in B. Ergo hæ duæ formulæ coniunctæ faciunt A q + A 2 in B + B q. Cũ .n. A in B bis ſit poſitũ, debent ad A apponi 2, hoc modo, A 2 in B.

A + B
A + B
A q + A in B
A in B + B q
A q + A 2 in B + B q

A q + A in B
A in B + B q

1. A in B.
2. A q + A 2 in B + B q.
3. A c + A q 3 in B + A 3 in B q + B c.
4. A qq + A c 4 in B + A q 6 in B q + A 4 in B c + B qq.
5. A ß + A q q 5 in B + A c 10 in B q + A q 10 in B c + A 5 in B q q + B ß.
6. A q c + A ß 6 in B + A q q 15 in B q + A c 20 in B c + A q 15 in B q q + A 6 in B ß + B q c.
7. A ß 6 + A q c 7 in B + A ß 21 in B q + A q q 35 in B c + A c 35 in B q q + A q 21 in B ß + A 7 in B q c + B ß 6.

Pro tertia formula, quæ eſt pro radice cubica, duæ

A q + A 2 in B + B q, in A + B hoc modo. Ex A in A q, fit A ce: ex A in A 2 in B, fit A q 2 in B: Ex A in B q, fit A in B q. Item, ex B in A q fit A q in B: ex B in A 2 in B, fit A 2 in B q: ex B in B q, fit B ce. Formulæ duabus lineis incluſæ, faciunt A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce. Vt in appoſita formula apparet.

A q + A 2 in B + B q
A + B
―――――――――――――
A ce + A q 2 in B + A in B q
A q in B + A 2 in B q + B ce
―――――――――――――
A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce

Nam A q 2 in B, & A q in B faciunt A q 3 in B: & A in B q, cum A 2 in B q, facit A 3 in B q. Eodem modo conſtructæ ſunt reliquæ formulæ. Nam quarta facta eſt ex ductu tertiæ in A + B: quinta ex ductu quartæ in A + B, &c.

Articulus II.

Omnis generis Radices extrahere.

Vt facilius radices extrahantur, notentur hæc. Primò ſub numero primo verſus dextram, ponendum eſſe punctum. Deinde in extractione radicis quadratæ, vno prætermiſſo, ſub tertio, quinto, ſeptimo, &c. In extractione cubicæ, duobus prætermiſſis, ſub quarto, ſeptimo, decimo, &c. In biquadratæ, tribus prætermiſſis ſub quinto, nono, decimotertio, &c.

Secundò, in formulis ſupra poſitis, primum A cum ſuo charactere, tantum in primo quoto vſurpari; pro reliquis nullam amplius eius rationem haberi.

Ter-

Tertiò. Quotum inuentum, ſiue vnam, ſiue plures habuerit figuras, vocari A, inueniendum B.

Quartò, pro noui diuiſoris inuentione, inuentum quotum eſſe multiplicandum, vt character, & numerus poſt A poſiti, indicant.

His notatis extrahemus ex hoc numero 469279801 6 radicem quadratā, hac vſi formula $Aq + A\ 2\ in\ B + Bq$. Notatis itaque punctis, video in ſecunda columna tabulæ radicum, & graduum, quis numerus quadrat° proxime minor ſit numero vltimi membri verſus ſiniſtram, nimirum numero hoc 46, inuenioque 36, cuius radicem 6 pono poſt lunulam, & 10, quæ ſubtractis 36 ex 46, reſtāt ſcribo ſupra 46, vt in prima apparet operatione. Pro alio diuiſore, cum in formula habeam + A 2, duco quotum 6 A, in 2, & habeo nouum diuiſorem 12. Cuius priorem figuram 2 pono poſt quartum punctum, nempe ſub 9, alteram deinceps ſiniſtrorſum, & video quoties 1 in 10 contineatur: continetur ſæpius, quam octies, poſſum tamen propter ſequentem quoti figurā non niſi 8 accipere. Et quia habeo in formula A 2 in B, duco duplum quoti 6 A, in 8 B, quorum iam inuētum, & produco 96. Rurſus quia in formula habeo + Bq, addo quadratum quoti 8 B, nempe 64, ad 96, hoc modo, & conflo 1024 quibus ex 1092 ſubtractis reſtant 68, vt in ſecunda operatio-

Operatio 1.

```
1 0
4̶6̶ 9 2 7 9 8 0 1 6 ( A
     1 2                  6
```

Operatio 2.

```
1̶ 0̶ 6 8                  AB
4̶6̶ 9̶ 2̶ 7 9 8 0 1 6 ( 68
1̶ 2̶ 3 6
  1
```

```
  96
  64
1024
```

peratione apparet: Pro tertio diuiſore, cum habeam in formula A 2, duco totum quotũ 68 A in 2, & produco 136, diuiſorem nouum, cuius figura prima poſt tertium punctum, nempe ſub 7 poſita, & reliquis deinceps, vt in ſecunda vides operat. video, quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies.

Repono 5 ad quotum: Et, quia habeo in formula, A 2 in B, duco 5 B, in diuiſorẽ 136, & produco 680, quibus addo quadratũ quoti 5 B, quod habeat formula + B q, hoc modo, ſummam 6825 ſubtraho ex 6879, & reſtant 54, vt in tertia operatione cernis.

Operatio 3.

```
   106854
4692719 8016   ( A  | B
                 68 | 5
   1223670
     113
```

```
 680
  25
----
6825
```

Pro alio diuiſore duplico totum quotum hactenus inuentum, nimirum 685, & inuenio 1370, vt in tertia apparet operatione, collocatoq; o ſub 8 poſt ſecundum punctum, & reliquis figuris deinceps ſiniſtrorſum, video nihil accipi poſſe: pono ergo ad quotum o, & paro nouum diuiſorem, vt prius, qui erit 13700. Hoc diuiſore collocato, vt in quarta operatione apparet, video quoties



1 in 5 contineatur, cõtinetur quater: poſitis igitur 4 ad quotum, duco totum diuiſorẽ in 4 B, & produco 54800, quibus

Operatio 4.

```
  106854
469271980 16   (  A   | B
                 6850 | 4
  12236700
    11337
      1
```

addo

addo quadratum quoti 4 B, hoc modô ſummam 548016 ſubtraho ex 548016, & reſtat nihil, vt in quarta operat. apparet.

54800
16
548016

Vulgari modo ſic extraho radicem quadratam.

Operatio 1.

2
10
4692798016(68
128

Noto puncta, vt prius, & video quis numerus quadratus ſit proxime minor numero vltimi membri 46, & video 36; pono ergo eius radicem 6 ad quotum, vt ſupra.

Operatio 2.

1
2
103
4692798016(68
128

Deinde duplum quoti nempe 12 aſſumo pro nouo diuiſore quem pono, vt prima habet operatio, & video quoties 1 in 10 contineatur, continetur octies: 8 ergo pono, & ad quotum, & ante diuiſorem 12 ſub 2, & dico octies 2 ſunt 16, quibus ex 29 ſubtractis, reſtant 13; vt in ſecunda apparet operat. Dico iterum octies 8 ſunt 64, quibus ex 132 ſubtractis, reſtant 68, vt tertia habet operatio. Pro nouo diuiſore aſſumo duplũ quoti 68, quod eſt 136, quem pono, vt tertia habet operatio, & video quoties 1 in 6 contineatur, continetur quinquies: 5 ergo & ad quotum, & ante diuiſorem 136 ſub 9 pono, vt in ter-

Operat. 3.

1
26
038
4692798016(685
11865
13

tia operatione, & progredior per omnia, vt hactenus, &c.

Secundum exemplum radicis cubicæ ſit hoc. Volo ex numero hoc 10106445831 2 extrahere radicem cubicam. Notatis punctis video in tabula radicum, quis cubus ſit proxime minor numero vltimi membri 101, & video eſſe cubum 64, cuius radicem 4 pono poſt lunulam, & ſubtractis 64 ex 101. reſiduum 37, pono ſupra 101, vt in prima operat. apparet. Diuiſorem iam paro hoc modo. In formula habeo + A q 3 : quadratũ ergo quoti 4 A, iam inuenti, duco in 3, & produco 48. Præterea in formula habeo + A 3 : ergo quotum 4 A duco in 3, & produco 12. Hos itaq; duos numeros 48, & 12, ſic addo 48 & conflo 492, diuiſorem, cuius figuram 2 po- 12 no ante punctum tertium ſub 6, reliquas dein- 492 ceps ſiniſtrorſum, vt in prima apparet operat. & video quoties 4 in 37 contineantur: continentur propter ſequentes figuras, tantum ſexies: pono ergo 6 ad quotum: & quia in formula habeo + A q 3 in B, duco 6 B, quotum in triplum quadrati quoti 4 A, nempe in 48, & produco 288. Rurſus quia in formula habeo + A 3 in B q, duco triplum quoti 4 A, nempe 12 in quadratum quoti 6 B, nempe in 36, & produco

Operatio 1.

```
  37                    A
10106445831 2      (   4
   492
```

Operatio 2.

```
   3
  37728                 AB
10106445831 2      (   46
  492618
   63
```

duco

duco 432. Deniq; quia in formula habeo + B ce; accipio 6 B, quoti cubum 216: atque hos tres numeros

288
432
216
33336

vt hic apparet, addo, & conflo 33336 quibus ex 37064 ſubtractis, reſtant 3728, vt in ſecunda operat. apparet. Paro iterum nouum diuiſorem, hoc modo. In formula habeo + A q 3. quadratũ ergo totius quoti hactenus inuenti 46 A, duco in 3. Duco quoq. 46 A quotũ in 3, quod in formula habeam + A 3, & produco hos numeros 6348, 138 quos

6348
138
63618

ſic addo & conflo 63618, diuiſorem nouum, quem colloco, vt ſecunda monſtrat operatio, hoc eſt, pono figuram primam 8 poſt ſecundum punctum ſub 5, & reliquas deinceps. Qua collocatione facta, video quoties 6 in 37 contineantur: continentur propter ſequentis diuiſoris figuras, tantum quinquies: pono ergo 5 ad quotum, qui eſt quotus 5 B. Et quia in formula habeo + A q 3 in B, & + A 3 in B q, & B ce, duco A q 3, hoc eſt 6348 in 5: 138 in 25, & produco 31740 & 3450, quos numeros, & cubum ipſius 5 B quoti noui addo, hoc modo

Operatione 3.

```
      3519
    37728833
  1010644583316  ( A | B
                   64 | 5
     49261814 5
       63488
        6
```

31740
3450
125
3208625

& conflo 3208625, quibus ex 3728458 ſubtractis, reſtant 519833, vt in tertia operat. apparet. Denique pro vltimo diuiſore duco quadratum totius quoti 465 A, hactenus in-

 uenti

atque reſiduum 77, pono ſupra 109, vt in prima operatione apparet. Pro primo diuiſore accipio formulam quintam, in qua habeo + A qq 5: quotum ergo 2 A, duco ad biquadratum, quod eſt 16, quo ducto in 5 fiunt 80. Secundò habeo + A œ 10; ducto ergo cubo ipſius 2 A, ſcilicet 8 in 10, produco 80. Tertiò habeo + A q 10: ergo quadratum ipſius 2 A duco in 10, & produco 40. Quartò habeo A 5; ducto 2 A in 5 produco 10. Hos igitur quatuor numer. 80. 80. 40. 10, addo hoc modo,

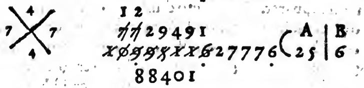
80
80
40
10
88410

& conflo 88410, diuiſorem primum, eius primam figuram 0, pono proxime poſt ſecundum punctum, nempe ſub 1, & reliquas ſiniſtrorſum deinceps, & video quoties 8 in 77 habeantur, habita ratione ſequentiũ figurarũ, habentur quinquies: ergo 5 ad quotũ poſitis, duco primo 5 in 80, nimirum in biquadrati quoti 2 A quintuplũ, eo quod formula habeat A q q 5 in B, & produco 400. Secundò, duco quadratum quoti 5 B in decuplum cubi quoti 2 A, ſcilicet 25 in 80, quod formula habeat A œ 10 in B q & produco 2000. Tertiò, duco cubũ quoti 5 B, in decuplum quadrati quoti 2 A, nempe 125 in 40, quod formula habeat A q 10 in B œ, & produco 5000. Quartò, duco biquadratum quoti 5 B in quintuplum quoti 2 A, quod formula habeat A 5 in B q q, & produco 6250. Quintò, cum in formula habeam B ß, addo his numeris 400. 2000. 5000. 6250 ſuperſolidum primũ ipſius 5 B, quoti, nempe 3125, hoc modo, & produco 6565625, quibus ex 7795116 ſubtractis, reſtant 1229491. Tertium quotum 6 reperies, ſi cum inuento quoto 25 A, progreſſus fueris, vt ante factum eſt.

400
2000
5000
6250
3125
6565625

Primò

Operat. 2.



Primò, notabis radicẽ biquadratam facilius exrahi, ſi bis quadrata extrahatur. Primò ex numero propoſito: iterum ex radice inuenta. Item quadrati cubicam extrahes ſi primùm quadratã; deinde ex radice inuenta cubicã extraxeris. Atq; vniuerſi ſi radices illas extrahas, quas characteres oſtendunt, erit radix extrahenda inuenta.

Secundò, ex fractis extrahuntur radices, ſi tam ex denominatoribus, quam ex numeratoribus extrahantur. Ita radix quadrata huius fractionis $\frac{9}{25}$, eſt $\frac{3}{5}$, cubica huius $\frac{8}{27}$, eſt $\frac{2}{3}$.

Tertiò, quando facta extractione, quod plerumque accidit, reſidua fuerint, præfige numero, ex quo radix extrahenda eſt, ſi quidem radicem quadratam extracturus es, duas, quatuor, ſex, &c. cyphras; ſi cubicam, tres, ſex, nouem, &c. Si ſuperſolidam, primam, quinque, decem, quindecim, &c. Sit igitur ex hoc numero 474 radix quadrata extrahẽda. Præfigo illi quatuor cyphras hoc modo, 4740000, cuius numeri radix quadrata eſt 2177; ſed quia numeri 474 radix proxima eſt 21, abijcio 77 ex 2177, iiſq; ſuppono 100, hoc modo $21\frac{77}{100}$. Centum autem ideo ſuppono, quod quatuor cyphræ numero 474 fuerint adiectæ.

Examen.

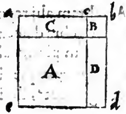
Fit examen in omnibus eodem ferè modo, quo in diuiſio-

uiſione. Abiiciuntur enim ex quoto, quoties fieri poteſt, 9: quod reſtat ponitur & in ſuperiore, & in inferiore parte crucis; Et, ſi fuerit extracta radix quadrata, in ſe quadratè ducitur: ſi cubica, cubicè: ſi ſuperſolida ſuperſolidè, &c. Et ex producto, reſiduoque extractionis, ſi quod fuerit, abiiciuntur rurſus 9, quoties fieri poteſt; & ſi quod, facta abiectione, reſtat, æquale fuerit reſiduo numeri, ex quo facta eſt extractio, probabile eſt operationem bonam eſſe: ſi æquale non fuerit, certum eſt erratum eſſe. Optima probatio eſt, ſi quotus in ſe quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicetur, prout radix cubica, quadrata, biquadrata, &c. extracta fuerit, & producto reſiduum, ſi quod fuerit, addatur. Si enim extremum hoc productum æquale fuerit numero, ex quo facta eſt extractio, bona eſt operatio.

ANNOTATIO.

Poſſunt plures radices ſimul extrahi; ſed curam hanc alijs relinquimus, cum ad noſtrum inſtitutum parum faciat. Non differt re, ſed modo tantum ratio extrahendarum radicum à nobis propoſita, à vulgari. Eſt tamen meo iudicio facilior, magis expedita, & memoriæ iuuandæ accõmodatior.

Demonſtratio extractionum.



Cum quadratum a b d e, componatur ex duobus quadratis A, B, & duobus rectangulis C, D, manifeſtũ eſt, cur. a c quotus inuẽtus pro nouo diuiſore duplicãdus ſit in extractione radicis quadratæ; nimirũ propter duo rectangula C, D. Quod vero

vero in extractione radicis cubicæ, tam quadratũ quoti inuenti, quam ipſemet quotus ſit triplicandus, hinc cõſtat. Quia ſi ſuper quadratum a b d e erigatur cubus, erit ille compoſitus ex duobus cubis, quorum latera ſunt ſegmenta, a c, c b; & ex ſex priſmatis, quorum tria pro baſi habent quadratum ſegmenti a c, altitudinem ſegmentum c b. Reliqua tria pro baſi habent quadratum ſegmenti c b; altitudinem ſegmentum ac. Vnde informa cubi habetur A ce + A q 3 in B + A 3 in B q + B ce. Sequẽtium radicum extractiones ex compoſitione formularum ſatis manifeſtæ ſunt. Vt enim ex A + B in A q + A 2 in B + B q fit formula cubi: ita ex eodem A + B in cubi formulã, fit formula biquadrati; & ex hac in idem A + B, fit formula superſolidi primi &c.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM

Liber Secundus.

DE NVMERO RATIOnali coßico.

HAnc Arithmeticæ partem, alij Algebram, alij regulam Coſs, alij quadraturã vocant. Algebra deſcendit ab radice גָּבַר, vt opinor: Coſſa, quam plerique ab Italica voce Coſa deſcendere autumant, ego quoque ab radice Hebraica כָּסַם, quæ ſupputare ſignificat, deriuari credo.

Hæc

Hæc nobilis Arithmetica tres habet partes. Inuentionem æquationis, Reductionem, & Reſolutionem, licet non omnes ad omnium quæſtionum ſolutionẽ concurrant. Dicuntur numeri coſſici, etiam denominati, quod à certis characteribus denominẽtur, vt dignoſci inter ſe poſſint. Characteres ſunt N. 2e q, ce, q q, ß, &c. iidẽ omnino, qui ſupra in radicum tabula poſiti ſunt. Character primus ſignificat numerum abſolutum. Secundus radicem. Tertius quadratum. Quartus cubum. Quintus biquadratum. Sextus ſuperſolidum primum. Quidam pro 2e ponunt literam L, quæ latus ſignificat, alij R. Pro q ponunt quidam ☿. & quadratum vocant zenſum; quadraticubum zenſicubum; biquadratum zenſizenſum. Ponuntur hi characteres poſt numeros, hoc modo 2 2e, 2 q, 2 q, 2 ce, 2 q q, 2 ß. Primus ſignificat duas radices; Secundus duo quadrata; tertius duos cubos; quartus duo biquadrata; quintus duos ſuperſolidos primos. Vt autem ordine procedamus. Primo trademus elementa, & radicum extractionem. Secundo tres partes regulæ explicabimus. Tertiò, vſum dabimus, & praxim; omnia ſumma, qua poſſumus, breuitate.

CAPVT I.

DE ELEMENTIS NVMErorum coſsicorum.

Notetur alios numeros coſſicos eſſe ſimplices, alios compoſitos, & diminutos. Simplices ſunt, qui nullo connectuntur ſigno. Compoſiti, qui hoc ſigno + connectuntur, diminuti, qui hoc — disiunguntur; ſignificat enim hoc ſignum + plus, hoc — minus.

ARTI-

Articulus I.

DE SIMPLICIUM COSſicorum Additione, & Subtractione.

Simplicium Additio, & Subtractio, ſi eoſdem habeant characteres, eodem fiunt modo, quo abſolutorum. Vt ſi 8 ℞, & 10 ℞ addantur fient 18 ℞. Si 8 ℞. ex 18 ℞ ſubtrahātur, reſtabunt 10 ℞. Si diuerſos habeant characteres addūtur per ſignū +, Subtrahuntur per −. Vt ſi 6, 8 ℞, 10 q, & 3 ce addenda forent, fieret hæc ſumma 6 + 8 ℞ + 10 q + 3 ce. Si vero 6 ex 8 ℞ eſſent ſubtrahenda, relinquerentur 8 ℞ — 6. Si 10 q, ex 3 ce relinquerentur 3 ce — 10 q.

Articulus II.

DE MULTIPLICATIOne, & diuiſione coſsicorum ſimplicium.

Quod ad numeros attinet, fiunt multiplicationes, & diuiſiones eo modo, quo abſolutorum. In characteribus autem fit mutatio. Ac primo quidem ſi coſſicus per abſolutum multiplicetur, aut diuidatur, manet idem character. Vt ſi 8 ℞ per 4 multiplicentur, fient 32 ℞. Si 10 q per 5, fient 50 q. Si 6 ce per 8, fient 48 ce. Si verò 32 ℞ per 4 diuidantur, prouenient 8 ℞. Si 50 q per

per 5, prouenient 10 q. Si 48 ce per 8, prouenient 6 ce.

Si coſſici per coſſicos multiplicentur, adduntur eorum exponentes (exponentes voco numeros ſupra characteres in ſubiecta tabella deſcriptos) & character ſummæ exponentium additur producto. Vt ſi ducantur 4 ꝝ.

0	1	2	3	4	5	6	7
N	ꝝ	q	ce	qq	ß	qce	ßb
8	9	10	11	12	13	14	15
qqq	cece	qß	ßc	qqce	ßd	qßb	ceß
16	17	18	19	20			
qqqq	ße	qcece	ßf	qqß			

in 3 q, fient 12 ce: nam cum characterum ꝝ: & q exponentes ſint 1 & 2, eorumque ſumma 3 ſub ſe habeat characterem ce, fit vt producto 12, apponendus ſit character ce. Eodem modo, ſi 6 q ducantur in 10 ce, producentur 60 ß; ſi 2 ß in 8 q ce, fient 16 ß c, &c.

In diuiſione aduerte, quos characteres gerant diuidendus & diuiſor: eorum exponentes ſume; minorem à maiore ſubtrahe, eritque reſiduum exponens characteris quoto adſcribendi. Vt ſi diuidantur 36 ce per 4 ꝝ, prouenient 9 q. Si 20 ce per 5 q, prouenient 4 ꝝ. Si 40 q q per 5 q, prouenient 8 q. Si occurrat diuiſor maiore affectus charactere, quam diuidendus, fiet diuiſio per lineam interiectam. Vt ſi ſint 8 q per 3 ce diuidenda, fiat id hoc modo, $\frac{8\,q}{3\,ꝝ}$.

Articvlvs III.

DE ADDITIONE, ET *ſubtractione compoſitorum, & diminutorum.*

Si diligenter ad ſigna +, —; & ad duo præcepta attendas, facile quoſuis numeros addes, & quemlibet à quolibet ſubtrahes: nam etiam maiores â minoribus in hac pragmatia ſubtrahi poſſunt, quod quando fit, reſiduum eſt minus quam nihil. Præcepta hæc ſunt.

Primum. ***Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando præpoſterè ponuntur, tum enim ſubtrahitur, ſuperior ab inferiore. & ex + fit —; & ex — fit +.***

Secundum. ***Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, à quo fit ſubtractio, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue æqualis.***

Exemplum additionis. Incipimus à ſiniſtra, quanquam & à dextra poſſemus, & dicimus 4 & 7 faciunt 11, quibus additur character qce, quem 4 & 7 habent.

4 qce + 3 ß + 8 ce + 10 q — 12 ℞ — 20
7 qce — 6 ß — 4 ce + 12 q — 7 ℞ + 16
11 qce — 3 ß + 4 ce + 22 q — 19 ℞ — 4

Quando + 3 ß & — 6 ß adduntur, fiunt — 3 ß; quia cũ habeãt diuerſa ſigna, pro additione fit ſubtractio, & retinetur ſignũ maioris numeri, iuxta ſecundum præceptũ. Idem factũ vides in additione + 8 ce, & — 4 ce, fiunt .n. + 4 ce. Item in additione — 20, & + 16 fiunt .n. — 4.

Exem-

Exemplum ſubtractionis. Subtractis 3 qce ex 8 qce. reſtant 5 qce. Subtractis verò + 5 ß ex — 2 ß, reſtãt — 7 ß: quia hic

8 qce — 2 ß + 3 ce + 4 q — 10 ℞ — 12 + 9
3 qce + 5 ß + 9 ce — 6 q — 15 ℞ + 7 + 6 ℞
5 qce — 7 ß — 6 ce + 10 q + 5 ℞ — 19 — 6 ℞

pro ſubtractione, fit Additio, & retinetur ſignum ſuperioris. Idem fit quando ſubtrahuntur — 6 q ex + 4 q, reſtant enim + 10 q. Item quando + 7 ex — 12 ſubtrahuntur, reſtant —19. Quãdo verò + 9 ce ex + 3 ce ſubtrahũtur, reſtant — b ce; quia hic numeri præpoſtere ponuntur, maior infra, minor ſupra quod qñ fit, ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —. Idem accidit, qñ — 15 ℞ ex — 10 ℞ ſubtrahuntur, ſubtrahitur enim ſuperior ab inferiore, & ex — fit +, ſecundum regulam primam. Quando + 6 ℞ ſubtrahuntur ex 0, ſiue nihilo, reſtant — 6 ℞. Si 6 ℞ haberent ſignum —, reſtarent + 6 ℞.

ARTICVLVS IIII.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione compoſitorum & diminutorum.

Quod ad characteres attinet, eadem regula ſeruatur, quæ de ſimplicibus tradita eſt. De ſignis verò + & —, hæc datur regula.

Eadem ſigna ponunt ſignum +; diuerſa —.

Sint 6 qq — 5 ce + 4 q + 10 ℞ — 20, per 10 q + 8 ℞ — 12 multiplicanda. Procedo ſecundum regulas, vt ſubiecta habet formula.

6qq − 5ce + 4q + 10℞ − 20
10q + 8℞ − 12

60q℞ − 50ß + 40qq + 100ce − 200q
+ 48ß − 40qq + 32ce + 80q − 160℞
− 72qq + 60ce − 48q − 120℞ + 240

60qce − 2ß − 72qq + 192ce − 168q − 280℞ + 240.

In omnes ſuperiores ducuntur primo 10q. Secundò 8℞. tertio − 12. Ductis igitur 10q in 6qq, fiunt 60qce: in − 5ce, fiunt − 50ß in + 4q, fiunt + 40qq: in 10℞, fiunt + 100ce: ac deniq; in − 20, fiunt − 200q. Secundò, ductis + 8℞ in 6qq, fiunt 48ß: in − 5ce, fiunt − 40qq: in + 4q, fiunt + 32ce: in + 10℞, fiunt + 80q: ac denique in − 20, fiunt − 160℞. Tertiò, ductis − 12 in 6qq. fiunt − 72qq: in − 5ce, fiũt + 60ce: in + 4q, fiunt − 48q: in + 10ce, fiunt − 120℞: & poſtremo in − 20, fiunt + 240. Additio numerorum inter duas lineas incluſorum, fit ſecundum præcepta Additionis compoſitorum, & diminutorum, hoc nota diligenter quod quando alter multiplicantium habet +, alter −, productum ſemper habere − quando vero vterque habet +, aut − productum, ſemper habere +, iuxta regulam traditam.

Diuiſio, cum non niſi in exemplis arte factis, locum habeat, eam nos aliter non abſoluemus, quam linea inter diuidendum, & diuiſorem interiecta in morem fractorum. Vt ſi 8q + 10℞ per 2℞ − 20 ſint diuidenda; ita eos collocabimus $\frac{8q + 10℞}{2℞ - 20}$.

Annotatio.

De fractis numeris pauca precipio, cum difficultatis nihil habeant, ſi quis in abſolutorum fractorum calculo probè ſit verſa-

verſatus. Nam primo ad eandem denominationem reducuntur, ut abſoluti. Sint enim hæ fractiones $\frac{4\,\text{℞}+20}{1\,\text{℞}+5}$, $\frac{3\,\text{q}-10\,\text{℞}}{12}$ *ad eandem denominationem reducendæ. Pro Denominatore nouo duco in ſe denominatores reducendos, & produco* 12 ℞ + 60. *Pro numeratoribus nouis duco per crucē* 4 ℞ + 20 *in* 12: & 3 q − 10 ℞ *in* ℞ + 5, & *produco* 48 ℞ + 240, *atq;* 3 ce + 5 q − 50 ℞ *quibus ſuppono communem Denominatorem, hoc modo* $\frac{48\,\text{℞}+240}{12\,\text{℞}+60}$, $\frac{3\,\text{ce}+5\,\text{q}-50\,\text{℞}}{12\,\text{℞}+60}$.

Secundo, ſint eædem fractiones addendæ, reduco primò eas ad eandem denominationem; deinde Numeratores reductos addo, & conflo 3 ce + 5 q − 2 ℞ + 240; *his ſuppono cōmunem denominatorem hoc modo* $\frac{3\,\text{ce}+5\,\text{q}-2\,\text{℞}+240}{12\,\text{℞}+60}$.

Tertiò, ſit hæc fractio $\frac{4\,\text{℞}+20}{1\,\text{℞}+5}$ *ex hac* $\frac{3\,\text{q}-10\,\text{℞}}{12}$ *ſubtrahenda. Reductum hunc Numeratorem* 48 ℞ + 240, *ſubtraho ex hoc reducto* 3 ce + 5 q − 50 ℞ *hac methodo*,

3 ce + 5 q − 50 ℞ + 0 quo facto, ſuppono reſiduō cō-
+ 48 ℞ − 240 munem Denominatorem, ſic
3 ce + 5 q − 98 ℞ − 240 $\frac{3\,\text{ce}+5\,\text{q}-98\,\text{℞}-240}{12\,\text{℞}+60}$.

Quartò, ſi eædem fractiones inter ſe ſint multiplicandæ, duco tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, & produco $\frac{12\,\text{ce}-20\,\text{q}-200\,\text{℞}}{12\,\text{℞}+60}$. *Si vna per alteram ſit diuidenda, inuerto Diuiſorem, ducoq; tam ſuperiores, quam inferiores in ſe, producoq;* $\frac{3\,\text{ce}+5\,\text{q}-50\,\text{℞}}{48\,\text{℞}+240}$. *Contingit non rarò, ut integra fractis reperiantur æqualia, aut integris fracta ſint addenda, vel ab illis ſubtrahenda. Quod quando contingit, ſupponatur integris vnitas, & fiant reliqua, ut iam eſt dictum. Exemplum. Sit hæc fractio* $\frac{8\,\text{q}+5\,\text{℞}-10}{2\,\text{℞}+4}$ *æqualis inuenta huic numero* 24: *aut illi ſit addenda; aut ab illo ſubtrahenda. Suppono integro vnitatem hoc modo*, $\frac{24}{1}$, $\frac{8\,\text{q}+5\,\text{℞}-10}{2\,\text{℞}+4}$. *Pro communi denominatore duco inferiores in ſe, & produco* 2 ℞ + 4 *pro Numeratoribus verò duco per crucem* 24 *in* 2 ℞ + 4: &

8 q + 5 ℞ — 10, in 1, producoq́; 48 ℞ + 96, & 8 q + 5 ℞ — 10 quibus aut ſuppono cõmunem Denominatoré hoc modo $\frac{48℞+96}{2℞+4}$, $\frac{8q+5℞-10}{2℞+4}$; aut 48 ℞ + 96, & 8 q + 5 ℞ — 10 addo, & conflo $\frac{8q+53℞+86}{2℞+4}$: aut 8 q + 5 ℞ — 10, ex 48 ℞ + 96 ſubtraho, & reſtát $\frac{43℞+106-8q}{2℞+4}$.

Articvlvs V.

De Radicvm Ex-tractione.

Ex ſimplicibus coſſicis radix non aliter extrahitur, atque ex abſolutis. Quando autẽ quadrata, cubica, aliáue radix extrahenda ſit, character indicat. Ita radix quadrata huius 25 q, eſt 5: cubica huius 27 ce, eſt 3, &c.

Ex cõpoſitis verò, & diminutis, tunc tantum hactenus vſitata methodo radices extrahi poſſunt, quãdo exponentes, ſeruant progreſſionem Arithmeticam, hoc eſt, quando characteres duorum extremorũ à medio æqualiter diſtãt, cuiuſmodi ſunt Nº. 1 ℞. q 2; & Nº. q 2. qq 4: & Nº. ce 3. q ce 6: & Nº. qq 4. qqq 8, &c. Si minimus exponens non ſit 0, ſed numerus; erunt characteres abbreuandi, hoc eſt, minimus exponens erit tum à ſe, tum ab aliјs exponẽtibus ſubtrahendus, & reſiduorũ characteres aſſumendi. Vt ſi ſint ce 3, ß 5. ßb 7; ſubtrahenda ſunt 3 ex 3. 5 & 7, vt reſtent 0, 2. 4; quorum characteres ſunt N. q qq. Nos characterem N ómittimus, eoq́; numerum abſolutè poſitum affectum intelligimus.

His expoſitis hac arte radices ex compoſitis, & diminutis extrahuntur.

Primò.

Primò. Per numerum maximo charactere affectum diuidantur reliqui duo; ſemper enim in hanc extractionem tres tantum numeri concurrunt.

Secundò. Diuiſione facta, ad quadratum ſemiſſis numeri radicum, additur, aut ab illo ſubtrahitur, abſolutus, prout ſigno +, vel —, affectus fuerit.

Tertiò, ex hoc aggregato, vel relicto, extrahitur radix quadrata; cui additur, aut ab illa ſubtrahitur, ſemiſſis numeri radicum, prout radicum numerus ſigno +, vel —, fuerit affectus.

Notabis in huiuſmodi extractionibus, quando numerus abſolutus notatur ſigno —, ſemper eſſe duas radices, maiorem, & minorem, illa habetur, ſi radici inuentæ addatur ſemiſſis dictus; hæc ſi ex ſemiſſe radix ſubtrahatur. Intelligo per numerum radicum, illum cuius exponens medius eſt trium numerorum illorum, qualemcunq; characterem gerat. Numeri autem ad extractionem diſpoſiti ſic ſunt.

1 q. 20 ℞ — 91. exponentes. 2. 1. 0.
1 q. 187 — 6 ℞. exponentes. 2. 0. 1.
1 q. 187 + 6 ℞. exponentes. 2. 0. 1.
3 q. 54 ℞ — 216. exponentes. 2. 1. 0. diuiſis per 3 q. ꝓ-
1 q. 4 ℞ + 60. exponentes. 2. 1. 0. (ueniūt 18 ℞ — 72
1 qq. 26741 — 100 q. exponentes. 4. 0. 2. (ueniūt 30 q + 216
2 qq. 60 q + 432. exponentes. 4. 2. 0. diuiſis per 2 qq. ꝓ-
1 ßb. 9 ß + 112 ce. exponentes. 7. 5. 3. vel. 4. 2. 0.

Ex quib⁹; vt radices extrahantur diuidātur duo poſtremi numeri per primū, vt factū vides in quarto & 7. exēplis: nā in reliquis, cū vbiq; primus numerus ſit vnitas diuiſione nulla opus eſt. Diuiſione facta, extrahātur radices, ac primo ex 20 ℞ — 91. Semiſſis numeri radicū eſt 10, eius

quadratum 100, ex quo ſublato abſoluto 91, propter ſignum —, reſtant 9; ad cuius radicem quadratam 3, additus ſemiſſis, facit 13; quæ eſt radix maior; minor habetur ſi radix 3 ex ſemiſſe 10 ſubtrahatur, relinquuntur enim 7. Hæ duæ radices in ſe ductæ, procreant numerum abſolutum 91.

In ſecundo exemplo 187 — 6℞, additus abſolutus ad quadratum ſemiſſis numeri radicum, propter ſignum +, facit 196. A cuius radice quadrata 14, ſi ſubtrahatur ſemiſſis 3, propter ſignum —, reſtant 11, æſtimatio, ſeu valor vnius 1℞.

In quarto exemplo, facta diuiſione per 3, reſtat extrahenda radix ex 18℞ — 72. Ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, quod eſt 81, ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſſi, parit valores 12, & 6, qui numeri in ſe ducti creant abſolutum 72.

In ſexto exemplo, 26741 — 100q. Ad quadratum ſemiſſis numeri radicum 2500, additus abſolutus, facit 29241; ex cuius radice quadrata 171, ſubtractus ſemiſſis 50, relinquit 121; cuius numeri quadratum cum centuplo ſui, parit numerum abſolutum. Sed nota numerum 121 habere aliam radicem quadratam, quod numerus radicum gerat characterem q. Radix autem illa eſt 11. Huius numeri vnum biquadratum, & 100 quadrata, faciunt numerum abſolutum.

In vltimo exemplo 9ß + 112ce, ſiue (abbreuiatis characteribus) 9 q + 112, ſemiſſis numeri radicum eſt $4\frac{1}{2}$, ſiue $\frac{9}{2}$, eius quadratum $\frac{81}{4}$, ſiue $20\frac{1}{4}$, ad quod additus abſolutus, facit $132\frac{1}{4}$, ſiue $\frac{529}{4}$; radix eſt $\frac{23}{2}$, ſiue $11\frac{1}{2}$, ad quam additus ſemiſſis, facit 16, qui numerus,

rus, quod numerus radicum ſit 9 q, habet aliam radicem quadratam, 4.

DEMONSTRATIO breuis.

Extractionis huius demonſtratio pendet ex quinta ſec. Eucl. quæ numeris accommodata, ſic habet. *Si numerus in duas partes inæquales diuidatur, erit numerus à partibus illis factus, cum quadrato ſemiſſis differentiæ duarum illarum partium, æqualis quadrato dimidij.*

Articvlvs VI.

DE ELEMENTIS SEcundarum radicum.

Vt in regula poſitionum interdum vna, interdum duabus, aut pluribus opus eſt poſitionibus: ita & in Algebra. Hactenus enim egimus tantum de radicibus vnius poſitionis, ſine de radicibus primis. Iam paucis de ſecundis agendum eſt. Quandocunque autem pluribus, quam vna poſitione opus eſt, ſignantur illæ alteræ poſitiones literis, hoc modo; 1 A. 1 B. 1 C. 1 D, &c.

De Additione & Subtractione ſecundarum radicum.

Si characteres fuerint ijdem, tantum adduntur, & ſubtrahuntur numeri. Vt ſi 3 A ad 4 A addenda ſint, fient 7 A. Si 3 A ex 7 A ſubtrahenda, reſtant 4 A.

G 5 Si

Si characteres ſint diuerſi, fit additio per +: ſubtractio per —, Vt ſi addendæ ſint 3 ℞ ad 4 A, conſtantur 3 ℞ + 4 A. Si 4 A ſubtrahenda ex 3 ℞ reſtant 3 ℞ — 4 A.

DE MVLTIPLICATIONE, & Diuiſione.

Si characteres fuerint ijdem fit multiplicatio, vt in primis radicibus; Nam 4 A in 6 A, faciunt 24 A q. Si diuidenda ſint 24 A q, per 4 A, prouenient 6 A. Si diuerſi fuerint characteres, vterque retinetur in producto. Vt ſi 3 ℞ ducendæ ſint in 4 A, producentur 12 ℞ A. Si 12 ℞ A per 3 ℞ diuidenda, prouenient 4 A, tollitur enim diuiſoris character.

Radicis extractio fit vt diuiſio. Nam ſi radix quadrata ex 16 A q ſit extrahenda, erit illa 4 A. Si cubica ex 27 A ce, erit illa 3 A.

CAPVT II.

REGVLÆ ALGEBRÆ, & partium eius explicatio.

Regula Algebræ ſic habet. Ponatur pro numero abſcondito 1 ℞, quæ iuxta quæſtionis tenorem examinetur, donec æquatio inueniatur. Deinde reducatur, ſi opus ſit, æquatio. Poſtremo per maximum coſſicum diuidatur reliquum æquationis, & proueniet numerus abſconditus, vel in quoto, vel in aliqua eius radice, quæ qualis ſit, character coſſicus diuiſoris indicat. Ex hac regula apparet tres eſſe eius partes. Inuentionem æquationis,

tionis, reductionem, & reſolutionem: per reſolutionem intellige diuiſionem, & radicis extractionem.

ANNOTATIO.

Poteſt etiam alius numerus ab vnitate pro radice poni: ſed quando id fit, erit numerus inuentus per illam multiplicandus.

ARTICVLVS I.

DE INVENTIONE Æquationis.

Inuentio æquationis eſt, pro numero inueniendo ponere 1 ℞, hoc eſt, vnam radicem; atque cum illa procedere ſecundum quæſtionis ſententiam, non ſecus, ac ſi illa eſſet numerus inueniendus.

Exemplum primum. Inueniatur numerus, qui ſi ducatur in 3, ex producto demantur 24. reſidui $\frac{1}{3}$ ducatur in 5, producantur 20. Pono numerum inueniendum eſſe 1 ℞, cum qua procedo, vt vult quæſtio, hoc eſt, duco 1 ℞ in 3, & produco 3 ℞, ex quibus ſubtraho 24, hoc modo 3 ℞ — 24. huius $\frac{1}{3}$, eſt 1 ℞ — 8, hic numerus ductus in 5, producit 5 ℞ — 40; qui numerus iuxta quæſtionis ſenſum, æqualis eſſe debet, huic 20. Inuenta ergo eſt æqualitas inter 5 ℞ — 40, & 20.

Secundum exemplum. Inueniantur tres numeri, hac lege vt primum ſecundus excedat numero hoc 4: ſecũdum tertius hoc 6: ſitq; id quod fit ex ductu primi in ſecundum minus eo, quod fit ex primo in tertium, hoc numero 42. Quæro qui ſint numeri? Pono primum eſſe 1 ℞: ergo ſecundus erit 1 ℞ + 4: Tertius 1 ℞ + 10.

Pri-

Primus & ſecundus in ſe ducti, & producto additis 42, faciunt 1 q + 4 ℞ + 42. Primus & tertius in ſe ducti, faciunt 1 q + 10 ℞, qui numeri iuxta quæſtionis ſenſum æquales eſſe debent.

Tertium. Diuidatur numerus 24 in duas partes, vt ſi ducatur maior in 3, minor in 5, addanturque producto minoris 20, maioris 4, ſummæ fiant æquales. Pono maiorem eſſe 1 ℞: erit ergo minor 24 — 1 ℞: maior ductus in 3, facit 3 ℞: minor in 5, facit 120 — 5 ℞: ſi huic 20, illi addantur 4, erunt hæc 3 ℞ + 4, his 140 — 5 ℞ æqualia.

Quartum. Duo habent pecunias, quilibet certam ſummam, ſi primus dat ſecundo 5 aureos, habet ſecundus duplo plus primo: ſi ſecundus dat primo 10, habet primus triplo plus ſecundo. Quid quilibet habet? Pono primum habere 1 ℞, qui ſi dat ſecundo 5, retinebit ipſe 1 ℞ — 5: habet autem ſecundus, facta hac traditione, duplo plus, quam primo relictum eſt: habet ergo ſecundus 2 ℞ — 10; ex quibus ſi tollas 5, quæ à primo accepit, habebit ipſe 2 ℞ — 15. Qui ſi det primo 10, retinebit ipſe 2 ℞ — 25, & habebit primus 1 ℞ + 10, triplo plus ſecundo: ergo ſi ſecundi pecunia relicta, nimirum 2 ℞ — 25, triplicetur, erunt hæc 1 ℞ + 10, his 6 ℞ — 75 æqualia.

Quintum. Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes illæ in ſe ductæ, producant 91. Pono primam partem 1 ℞: erit ergo ſecunda 20 — 1 ℞: Hæ partes in ſe ductæ faciunt 20 ℞ — 1 q: quare æqualitas eſt inter 20 ℞ — 1 q, & 91. Ex his quinque exemplis facile videt lector, quid ſit inuenire æquationem.

ARTICVLVS II.

DE REDVCTIONE *æquationis.*

Conſiſtit Reductio in hoc, vt ſi vnius tantum generis adſint Coſſici, tandiu ab vna parte in aliam particulæ transferantur, donec ex vna parte ſit tantum coſſicus, ex altera tantum abſolutus. Si verò plures ſint coſſici, eadem translatio tandiu fiat, donec ex vna parte ſit ſolus maximus coſſicus cum ſigno +: ex altera parte minor coſſicus cum abſoluto. Quæ translatio fit tum per ſigna +, — hoc modo, ſi ante translationem fuerit + erit poſt illam —: contra ſi ante illam fuerit —, erit poſt illam +; tum his duobus principiis.

Si æqualibus æqualia addas, quæ conſlantur, erunt æqualia: & ſi ab æqualibus æqualia demas, quæ remanent, erunt æqualia.

Hæc itaque 5 ℞ — 40, his 20, art. præcedente inuenta æqualia, ita reduco. Addo vtrique parti 40, & erunt hæc 5 ℞, his 60 æqualia. Nam cum prior pars habeat 40 minus quam 5 ℞ radices, ſi ab illis tollo 40, addo illis 40: ergo & alteri parti 40 addere debeo, vt partes æquales maneant.

Hæc 1 q + 4 ℞ + 42, his 1 q + 10 ℞ inuenta æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1 q, & remanent hæc 4 ℞ + 42, his 10 ℞ æqualia. Rurſus tollo ab vtraque parte 4 ℞, & remanent hæc 42, his 6 ℞ æqualia.

Tertiò, hæc 3 ℞ + 4, his 140 — 5 ℞ inuenta æqualia,

lia, ita reduco. Addo vtrique parti 5 ℞, & erunt hæc 8 ℞ + 4, his 140 æqualia: iterum tollo ab vtraque parte 4, & remanent hæc 8 ℞, his 136 æqualia.

Quartò, hæc 1 ℞ + 10, his 6 ℞ — 75 æqualia, ſic reduco. Tollo ab vtraque parte 1 ℞, & erunt hæc 10, his 5 ℞ — 75 æqualia: Rurſus addo vtrique parti 75, eruntque hæc 85, his 5 ℞ æqualia.

Deniq; hæc 20 ℞ — 1 q, his 91 inuenta æqualia, ſic reduco. Addo vtrique parti 1 q, & erunt hæc 20 ℞, his 91 + 1 q æqualia: Iterum demo ab vtraq; parte 91, remanebuntque hæc 20 ℞ — 91, huic 1 q æqualia. *Ex dictis lector facile intelliget, quod ſignum + ſubtrahat, ſignum — addat.*

ARTICVLVS III.

DE RESOLVTIONE SIue diuiſione, & radicis extractione.

Diuiſio in hoc conſiſtit, vt, ſi facta reductione, ab vna parte ſit abſolutus, ab altera coſſicus, abſolutus per coſſicum, abiecto charactere, diuidatur: erit enim id quod prouenit, numerus quæſitus. Vt ſi in prima reductione diuidantur 60 per 5 ℞, proueniunt 12, numerus, qui in prima quæſtione art. 1. erat propoſitus.

Si in ſecunda quæſtione 42 per 6 ℞ diuidantur, prouenient 7, qui eſt numerus primus: erit ergo ſecundus 11, tertius 17.

Si

Si in tertia, 136 per 8 ℞ diuidantur, prouenient 17, numerus maior: erit igitur minor 7.

Si in quarta diuidantur, 85 per 5 ℞, prouenient 17, pecunia primi: erit ergo iuxta quæſtionis ſenſum, pecunia ſecundi 19.

In quinta quia ab vna parte eſt coſſicus maximus, ab altera minor coſſicus cum abſoluto, debet vterque, tam abſolutus, quam minor coſſicus, per maximum coſſicum diuidi, & exproducto radix quadrata extrahi.

Diuiſis igitur 20 ℞ — 91 per 1 q, proueniunt 20 ℞ — 91. Huius radices per ſupra dicta inuenientur, 13. 7. Semiſſis enim numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100; ex quo ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9, cuius radix quadrata 3, addita, & ſubtracta ſemiſſi numeri radicum, manifeſtas facit partes 13, & & 7: hæ enim partes in ſe ductæ, progignunt 91; vt quæſtio quinta volebat.

Annotatio I.

Ex tribus regulæ coſſicæ partibus, hactenus explicatis difficillima eſt inuentio æquationis, præterquam enim quod iudicium requirit, cognitione quoq; tum Geometriæ, & Arithmeticæ; tum multarum aliarum artium cum primis opus habet.

Annotatio II.

Aduerto diligēter, quando plures numeri proponuntur inueniēdi, ſemper illū primo inueniri, pro quo ponitur 1 ℞. Exēpli cauſa, in hac quæſt. Tres diuidunt inter ſe 100 aureos ea lege, vt ſecundus 4 amplius capiat primo; tertius 15. amplius ſecundo, quæro quid quilibet capiat? Si pono 1 ℞

pro

pro primo, inuenio pecuniam primi, Si pro ſecundo, inue-nio ſecundi. Si pro tertiò, tertij. Ponamus ergo primum ha-bere 1 ℞: habet ergo ſecundus 1 ℞ + 4: tertius 1 ℞ + 15. Summa omnium 3 ℞ + 19, æqualis eſt numero 100. Si ab vtraq; parte tollo 19; erunt 3 ℞, & 81 æqualia. Diui-ſis igitur 81, per 3 ℞, proueniunt 27, pecunia primi: ha-bet ergo ſecundus 31; tertius 42, qui numeri ſimul faci-unt 100.

Ponamus iam ſecundum habere 1 ℞; habet ergo primus 1 ℞ — 4, tertius 1 ℞ + 11. Summa 3 ℞ + 7 eſt æqualis 100: & ſi ab vtraq; parte tollantur 7: erunt hæc 3 ℞, his 93 æqualia. Diuiſis igitur 93 per 3 ℞ proueniunt 31 pe-cunia ſecundi.

Ponamus vltimo tertium habere 1 ℞, habebit ergo ſecun-dus 1 ℞ — 11; primus 1 ℞ — 15: ſumma 3 ℞ — 26, eſt æqualis 100. additis igitur vtriq; parti 26 erunt hæc 3 ℞, his 126 æqualia. Igitur diuiſis 126 per 3 ℞, proueniunt 42, pecunia tertij. Vides ergo, quod in prima poſitione, 1 ℞ valeat 27, in ſecunda 31, in tertia 42, ſemperq; illum numerum inueniri, pro quo ponitur 1 ℞. Poſſent ſufficere: ſed quia regula hæc, vt pleraque alia, exemplis ſolet cla-reſcere, pergimus porrò.

CAPVT III.

DE PRAXI NVMERO-rum coßicorum.

In hoc cap. Sex genera exemplorum proponemus. Primi generis erunt, in quibus, vel diuiſor eſt vnitas, vel nulla reductione opus eſt. Secundi generis ſunt, quæ ſola

ſola diuiſio ſoluitur. Tertij, quæ ſoluit extractio radicis. Quarti, in quo ſecundo radices occurrunt. Quinti, ſunt exempla geometrica. Sexti, in quo contractè propoſita, abſtractè ſoluuntur.

ARTICVLVS I.

EXEMPLA, IN QVIBVS vel diuiſor eſt vnitas, vel nulla reductione opus eſt.

Exemplum primum. Detur numerus, cui ſi addantur, 11, & ab eodem ſubtrahantur 7, prior ſit duplus poſterioris. Sit numerus ille 1℞: cui ſi addo 11: & ab eodem ſubtraho 7, fiunt 1℞ + 11: reſtant 1℞ — 7. Cum ergo iam numerus prior poſterioris duplus ſit, ſi duplicetur ſecundus, erunt hæc 1℞ + 11, his 2℞ — 14 æqualia. Et ſi ab vtraque parte tollatur 1℞, hæc 11, his 1℞ — 14. Rurſus ſi vtrique parti addantur 14, hæc 25, huic 1℞: numerus igitur quæſitus, eſt 25: nam 25 diuiſa per 1℞, reddunt 25.

Secundum exemplum. Dentur duo numeri differentes ſeptenario, hac lege, vt ſi minor ducatur in 2, & producto addantur 3: maior in 3, & producto addatur 1, fiat maior duplus minoris. Sit minor 1℞: erit igitur maior 1℞ + 7. Si minor ducatur in 2, & producto addantur 3, fient 2℞ + 3: Si maior ducatur in 3, & producto addatur 1, fient 3℞ + 22. Cum ergo iam maior duplus ſit minoris, ſi minor duplicetur, erunt hæc 4℞ + 6, his 3℞ + 22 æqualia. Si igitur ab vtraq; parte

tollantur 3℞, erunt hæc 1℞+6, his 22 æqualiã: ſi rurſus ab vtraq; parte tollantur 6: erit & 1℞, æqualis hiſce 16. Numerus ergo quæſitus minor, eſt 16, igitur maior 23.

Tertium. Detur numerus ex cuius $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$ ſi tollantur 80, reſtent 100. Eſto numerus 1℞: dictæ illius partes ſunt $\frac{1}{2}$℞, $\frac{1}{3}$℞, $\frac{1}{6}$℞; ſumma 1℞, ex qua ſi ſubtraham 80, reſtant 1℞ — 80 æqualia hiſce 100. Si igitur vtriq; parti addantur 80, erit & 1℞ æqualis hiſce 180: igitur 180 eſt numerus quæſitus.

Quartum. Detur numerus, ex cuius $\frac{1}{4}$, ſi ſubtrahantur 13, reſiduũ ducatur in 4, proueniunt 48. Eſto numerus 1℞, ex cuius $\frac{1}{4}$, ſi tollo 13, reſtant $\frac{1}{4}$℞ — 13: his ductis in 4, proueniunt 1℞ — 52, æqualia his 48. Si igitur vtrique parti addantur 52; erit & 1℞, æqualis 100: ergo 100 eſt numerus quæſitus.

Quintum. Duo habent pecunias. Primus dicit ſecundo, ſi mihi dares vnum aureum, haberem quantũ tu: infert ſecundus, ſi mihi dares tu vnum, haberem duplo plus te: quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1℞, cui ſi ſecundus vnum dederit, habebit 1℞+1. Cum ergo inter 1℞+1, & pecuniam reſiduam ſecundi, ponatur æqualitas, habebit ſecundus 1℞+2: cui ſi primus dederit vnum, retinebit primus 1℞—1, habebit ſecundus 1℞+3. Cùm ergo iam pecunia ſecundi ſit dupla primi, ſi quod primus retinet duplicetur, erunt hæc 2℞—2, his 1℞+3 æqualia: & ſi vtrique parti addantur 2, hæc 2℞, his 1℞+5. Rurſus ſi ab vtraque parte tollatur 1℞: hæc 5, huic 1℞: primus ergo, qui ponebatur habere 1℞, habet 5: qui ſi dederit ſecundo 1, retinebit ipſe 4 habebit ſecundus 8, vnde ſi tollatur 1, reſtabunt 7, pecunia ſecundi.

ANNO-

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis numerorum natura. Nam ſi alter alteri det 8, reperietur pecunia primi 40, ſecundi 56, quantam nimirum creatur ex ductu 8 in 5, & 7. Idem verum eſt in quemcunq; numerum ducantur 5 & 7.

Sextum. Sunt duo numeri 20. & 25, & inueniendi ſunt alij duo, in quadrupla proportione, vt ſi maior ad 25, minor addatur ad 20, conflati numeri habeant triplã proportionem. Ponatur primus 1℞: erit ergo ſecũdus 4℞ qui additi prioribus eo quo diximus modo, facient 20+1℞, & 25+4℞. Hi numeri cum ponantur eſſe in tripla proportione, ducatur minor, nẽpe 20+1℞, in 3, eruntque hi 60+3℞ æquales, his 25+4℞. Si igitur ab vtraque parte demantur 3℞, erunt & hi 60, his 25 +1℞ æquales: ſi rurſus ab vtraque parte tollantur 25, erunt & hi 35 æquales huic 1℞. Numerus ergo minor, qui ponebatur 1℞, erit 35, cuius quadruplum 140; erit alter 20 & 35 faciunt 55; at 25, & 140 faciunt 165, qui numerus cum ſit triplus numeri 55, benè operati ſumus.

Septimum. Detur numerus, ex quo ſi tollantur 3, reſiddui $\frac{1}{3}$ addantur 7; ſumma hæc ducatur in 3, rurſusque ex producto tollantur 18, reſtent 21. Eſto numerus 1℞, ex quo ſi tollantur 3, reſtant 1℞−3: tertia pars eſt $\frac{1℞-3}{3}$, cui ſi 7, addantur, fiunt $\frac{1℞+18}{3}$, hæc in 3 ducta 1℞+18: hinc ſi tollantur 18, reſtat 1℞, æqualis huic 21: ergo 21 eſt numerus quæſitus.

Octauum. Detur numerus, cui ſi addam 7, & ex eodem demam 11; atq; ex conflati, & reſidui ſumma tollam numerum ipſum, reſiduoque huic addam 4, fi-

ant 27. Eſto numerus 1 ℞, cui ſi addo 7, & ab eodem ſubtraho 11, & vtrumque coniungo, efficio 2 + — 4: hinc ſi tollo 1 ℞ numerum ipſum, reſtant 1 ℞ — 4, quibus ſi addo 4, efficio 1 ℞, æqualem hiſce 27: ergo 27 eſt numerus quæſitus. Nam ſi illi addo 7, conflo 34; ſi adimo 11, relinquuntur 16: ſumma 34, & 16, eſt 50, ex qua ſi tollo 27, reſtant 23, his ſi ddo 4, conflo 27, numerum deſideratum.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum differentia ſit 12 hac lege, vt ſi quartam partem ſummæ illorum ducam in 2, & ex producto tollamus, relinquantur 20. Sit numerus minor 1 ℞: erit igitur maior 1 ℞ + 12. Summa vtriuſque eſt 2 ℞ + 12; quarta pars, $\frac{1}{2}$ ℞ + 3, quæ ducta in 2, facit 1 ℞ + 6: Vnde ſi demam 6, reſtat 1 ℞, æqualis 20. Ergo 20 eſt numerus quæſitus minor: ergo maior 32: ſumma vtriuſque 52, quarta pars 13 ducta in 2, facit 26. Vnde ſi tollam 6, reſtant 20.

Decimum. Progreſſionis Arithmeticæ primus terminus eſt 7, vltimus 40; ſumma omnium 282, quæro quis ſit numerus terminorum? Pono eſſe 1 ℞: ſumma primi, & vltimi eſt 47, quæ in $\frac{1}{2}$ ℞, ſemiſſem numeri terminorum ducta, facit $\frac{47}{2\text{℞}}$: ergo 282, & $\frac{47}{2\text{℞}}$ ſunt æqualia. Facta igitur diuiſione, erit numerus terminorum 12. Differentia progreſſionis, reperitur per regulam tertiam. Progreſſ. Arith.

Vndecimum. Quidam mercator lucratur $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ: de ſumma expendit 8; reſidui lucratur $\frac{1}{4}$, expenditque de hac poſtrema ſumma 15; deniquе reſidui huius vltimi lucratur $\frac{1}{5}$, atque expendit 5: ac tandem reperit ſe 25 aureis amplius habere, quam ab initio habuerat. Quæro quot ab initio habuerit au. quot iam ha-

habeat? Pono habuiſſe 1℞, cui $\frac{1}{3}$ addita, facit $\frac{4}{3}$℞: Ex his ſublatis 8 reſtant $\frac{4}{3}$℞ − 8. Quibus ſi addatur $\frac{1}{4}$, fient $\frac{5}{3}$℞ − 10; ex his dempta 15, relinquunt $\frac{5}{3}$℞ − 25, huius $\frac{1}{5}$, eſt $\frac{1}{3}$℞ − 5, quæ addita his $\frac{5}{3}$℞ − 25, facit $\frac{6}{3}$℞ − 30, ſiue 2℞ − 30. Vnde ſi, ſi tollantur 5, reſtant 2℞ − 35. Hæc cum numero hoc 25 ſuperent pecuniam, quam ab initio habuit, erunt hæc 2℞ − 35, his 1℞ + 25 æqualia; & ſi ab vtraq; parte tollatur 1℞, hæc 1℞, hæc 1℞ − 35, his 25. Rurſus ſi vtriq; parti addantur 35, erunt & hæc 60, huic 1℞ æqualia: ab initio ergo habuit 60 au. iam habet 85.

ARTICVLVS II.

EXEMPLA, QVÆ SOla diuiſio ſoluit.

Primum exemplum. Quidam mercator rogatus, quot haberet pecunias, reſpondit ſi pro mercibus darem $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ meæ pecuniæ; tu vero mihi donares 50, haberem 200: quæro quantum habeat? Pono habere 1℞, ex qua ſi $\frac{3}{5}$, & $\frac{1}{4}$ tollantur, reſtant $\frac{3}{20}$℞, quæ cum 50 faciunt $\frac{3}{20}$℞ + 50: ſunt ergo $\frac{3}{20}$℞ + 50, & 200 æqualia; & ſi ab vtraque parte tollantur 50, erunt & hæc $\frac{3}{20}$℞, his 150 æqualia. Diuiſis igitur 150 per $\frac{3}{20}$℞, proueniunt 1000; atque tot mercator habet au. Nam $\frac{3}{5}$ de 1000 ſunt 600; $\frac{1}{4}$ eſt 250; quæ ſubtracta de 1000, relinquunt 150; his ſi addantur 50; conflantur 200.

Secundum. Diuidatur numerus 100 in duas partes, vt $\frac{3}{4}$ maioris ſint æquales minori cum 5. Ponatur ma-

ior 1℞: erit igitur minor 100 — 1℞. Maioris $\frac{3}{4}$ faciunt $\frac{3}{4}$℞; minor cum 5 facit 105 — 1℞: ſunt ergó hæc $\frac{3}{4}$℞, his 105 — 1℞ æqualia. Et ſi vtriq; parti addatur 1℞ hæc $1\frac{3}{4}$℞, his 105. Diuiſis ergo 105 per $1\frac{3}{4}$℞, proueniunt 60, pars maior; erit igitur minor 40. Maioris $\frac{3}{4}$ ſunt 45; totidem quia minor cum 5 facit, bene operati ſumus.

Tertium. Da numerum, a cuius triplo, ſi tollam 30, reſiduum duplicẽ, à producto deducam 140, reſiduum ducã in 4. à producto tollam 100, reſtet nihil. Quæro qui ſit numerus? Pono eſſe 1℞; à cuius triplo ſi tollam 30, reſtant 3℞ — 30; ab huius duplo 6℞ — 60, ſi deducã 140, reſtant 6℞ — 200: hæc in 4 ducta, progignunt 24℞ — 800; à quibus ſi tollam 100, reſtant 24℞ — 900. quæ ſunt æqualia nihilo. Siue hæc 24℞ — 900 ſunt æqualia vni 0. Et ſi vtriq; parti addatur 900, erunt & hęc 24℞, his 900 æqualia. Diuiſis igitur 900 per 24℞ proueniunt $37\frac{1}{2}$, numerus quæſitus. Si enim ab eius triplo $112\frac{1}{2}$ tollam 30, reſtant $82\frac{1}{2}$; & ſi ab huius duplo 165, demam 140, reſtant 25; ac deniq; ſi à quadruplo huius 25, nimirum à 100, tollam 100 reſtat 0.

Quartum. Inueniatur numerus, cui ſi addatur $\frac{1}{4}$ ſui, & 7, tantum ſupra 90 excreſcat, quantũ ipſe eſt infra 79. Ponatur numerus ille 1℞: cui ſi addatur $\frac{1}{4}$ ſui, & 7, fient $1\frac{1}{4}$℞ + 7. Hic numerus cum tantum ſit ſupra 90; quantum 1℞ eſt infra 79, fit. vt ſi 1℞ ex 79, & 90 ex $1\frac{1}{4}$℞ + 7 ſubtrahantur, reſidua 79 — 1℞. & $1\frac{1}{4}$℞ + 7 — 90, ſint æqualia. Quare ſi vtriq; parti addantur 90, erunt & hæc 169 — 1℞. his $1\frac{1}{4}$℞ + 7 æqualia. Si rurſus vtrique parti addatur 1℞, erunt & hæc 169, his $2\frac{1}{4}$℞ + 7 æqualia.

Deni-

Denique ſi ab vtraque parte demantur 7, erunt & hæc 162, his $2\frac{1}{5}$℞ æqualia. Diuiſis ergo 162 per $2\frac{1}{4}$℞ proueniunt 72. Numerus quæſitus, cui ſi $\frac{1}{4}$ ſui cum 7 addantur, fient 97, qui numerus tantum eſt ſupra 90, quantum 72 ſunt infra 79.

Quintum. Ementium agrum 100 aureis ait alter alteri, ſi mihi tuæ pecuniæ $\frac{1}{2}$, & 5 aureos dares, agrum emere poſſem. Infert alter, ſi tu $\frac{1}{3}$ tuæ mihi dares, emerem agrum. Quot quilibet aureos habet? Pono primum habere 1℞: alter ergo habet 100 $-\frac{1}{3}$℞ (ſiquidem cum $\frac{1}{3}$ primi habet 100) cuius dimidium cum 5 additum pecuniæ primi, conficit 55 $+\frac{5}{6}$℞, quæ ſunt æqualia his 100: & ſi ab vtraq; parte tollam 55, erunt & hæc 45, his $\frac{5}{6}$℞. æqualia. Diuiſis ergo 4 per $\frac{5}{6}$ proueniunt 54, pecunia primi, cuius $\frac{1}{3}$, nempe 18 ex 100 ſublata, relinquit 82, pecuniam ſecundi, huius enim dimidium 41, cum 5 additum pecuniæ primi facit 100. Pari modo $\frac{1}{3}$ pecuniæ primi addita pecuniæ ſecundi, facit 100.

Sextum. Diuidatur numerus 10 in duas partes, vt maiore per minorem diuiſa, proueniant 20. Pono maiorem 1℞: erit igitur minor 10—1℞: diuiſo illo per hunc, proueniunt $\frac{1℞}{10-1℞}$, quæ ſunt æqualia his 20. Siue hæc $\frac{1℞}{10-1℞}$, ſunt his $\frac{20}{1}$ æqualia. Et reductis illis ad eandem denominationem, hæc $\frac{1℞}{10-1℞}$ his $\frac{200-20℞}{10-1℞}$, ſublatoque communi denominatore, hæc 1℞, his 200 — 20℞. Et ſi vtriq; parti addantur 20℞, hæc 21℞, his 200. Diuiſis igitur 200 per 21℞, proueniunt $9\frac{11}{21}$ pars maior: erit igitur minor $\frac{10}{21}$. Diuiſis enim $9\frac{11}{21}$ per $\frac{10}{21}$, proueniunt 20, quod erat propoſitum.

ANNOTATIO.

Reducuntur hæ fractiones $\frac{1℞}{10-1℞} \times \frac{20}{1}$ ad eandem denominationem per omnia, vt in reductione de abſolutis diximus. Ducuntur enim denominatores in ſe, & fit communis denominator 10 — 1 ℞. Pro numeratoribus ducuntur per crucem, 10 — 1 ℞ in 20, & fiunt 200 — 20 ℞. & 1. in 1 ℞ & fit 1 ℞ hoc modo $\frac{200-20℞}{10-12}$, $\frac{1℞}{10-1℞}$

Septimum exemplum. Viator quot diebus 7 milliaria conficit; alter 12 diebus poſt ab eodem loco diſceſſit, peragitque quotidie milliaria 9: quæro quoto die hic poſterior priorẽ cõſequatur? Hic primus 84 milliaria cõficit, antequã poſterior iter inſtituit, ſepties n. 12 ſunt 84. Quare inueniendus eſt numerus, qui ductus in 7, productoq; additis 84, tantum fiat, quãtum ſi idem numerus ducatur in 9. Ponatur numerus ille 1 ℞, quæ ducta in 7, facit 7 ℞, quæ cum 84 faciunt 7 ℞ + 84. Idem numerus ductus in 9 facit 9 ℞; ſunt ergo hæc 7 ℞ + 84, his 9 ℞ æqualia; & ſublatis ab vtraq; parte 7 ℞, hæc 84, his 2 ℞. Diuiſis igitur 84 per 2 ℞, proueniunt 42. Atque tot diebus poſterior priorem conſequitur. Ductis enim 42 in 7, & producto additis 84, fiunt 378; totidem fiunt ex 42 in 9.

Octauum. Diuidatur numerus 38 in tres continuè proportionales, vt quod fit à primo, & tertio proportionem habeat ſeſquialteram ad id, quod fit à primo & ſecundo. Ponatur ſecundus 1 ℞: erunt ergo primus & tertius ſimul 38 — 1 ℞. Secundus in ſe ductis facit 1 q: totidem cum faciat primus in tertium, fit, vt productum primi, & ſecundi habeat ad productum ſecundi in ſe proportionem ſeſquialteram, per proprietat. 3. progreſſ. geomet. erit ergo quod fit à primo, & ſecundo

$\frac{3}{2}$ q.

$\frac{2}{3}$q, quod diuiſum per 1ꝝ, producit numerum primum $\frac{2ꝝ}{3}$; qui ſubtractus à ſumma primi & tertij, relinquit tertium 38 — $\frac{5}{3}$ꝝ, ſiue $\frac{114 - 5ꝝ}{3}$. Ductus primus in tertium facit $\frac{228ꝝ - 10q}{9}$, quod eſt æquale 1q, quadrato nimirum ſecundi; ſiue, ſublato denominatore 9, eoque in 1q ducto, erunt hæc 9q his 228ꝝ — 10q æqualia. Et ſi vtrinque addantur 10q hæc 228ꝝ his 19q; & abbreuiatis characteribus hæc 228, his 19ꝝ. Diuiſis ergo 228 per 19, proueniunt 12, numerus ſecundus; primus ergo, qui inuentus eſt $\frac{2ꝝ}{3}$, erit 8, tertius 18.

Nonum. Quidam expendit ſuæ pecuniæ $\frac{3}{5}$, plus 70 aureos; qua expenſione facta, relinqui illi erant 220 aurei: quæro quantum pecuniæ habuerit? Pono habuiſſe 1ꝝ. Vnde ſi expendat $\frac{3}{5}$, plus 70, reſtant $\frac{2ꝝ}{5}$ — 70, quæ ſunt æqualia his 220. Si igitur vtriq; parti addantur 70; erunt & hæc $\frac{2}{5}$ꝝ, his 290 æqualia. Diuiſis igitur 290, per $\frac{2}{5}$ꝝ, proueniunt 725; tque tot aureos habuit: ex quibus ſi $\frac{3}{5}$, & 70 ſubtrahas, eſtant 220.

Decimũ. Quatuor inter ſe diuidunt 1000 aureos, ſecũdus toties capit 3, quoties primus 2, terti⁹ toties 5, quoties ſecũdus 4, quartus toties 7. quoties tertius 6. Quæro quid quilibet capiat? Pono primum capere 1ꝝ: & quia quoties primus capit 2, toties ſecundus capit 3, dico. 2 | 1ꝝ | 3, & inuenio pro ſecundo $\frac{3}{2}$ꝝ. Rurſus quia quoties ſecundus capit 4, toties tertius capit 5, dico. 4 | $\frac{3}{2}$ꝝ | 5, & inuenio pro tertio $\frac{15ꝝ}{8}$. Denique quia quoties tertius capit 6, toties quartus capit 7, dico. 6 | $\frac{15}{8}$ꝝ | 7, & reperio pro quarto $\frac{105ꝝ}{48}$, ſiue $\frac{35}{16}$ꝝ. Sũma omniũ eſt $\frac{105ꝝ}{16}$, ęqualis 1000. Diuiſis igitur 1000 per $\frac{105ꝝ}{16}$ proueniũt 152$\frac{8}{21}$, pecunia primi; quã ſi ducas productũ diuidas per 2, in 3, ꝑdit pecunia ſecũdi 228$\frac{12}{21}$:

ducta in 5, producto diuiſo per 4, prouenit pecunia tertij $285\frac{15}{21}$. Deniq; hac ducta in 7, producto diuiſo per 6, prodit pecunia quarti $333\frac{7}{21}$. Summa omnium eſt 1000: bene ergo operati ſumus.

Vndecimum. Habeo duo pocula, & vnum operculum, quod æſtimatur 90 aureis. Additum operculū precio minoris poculi facit ſummā duplam precij maioris poculi: additum verò precio maioris, facit ſummam triplam precij poculi minoris. Quæro quid vtrumq; poculum valeat? Pono minus valere 1℞, cui ſi addantur 90, erit ſumma 1℞ + 90 dupla precij poculi maioris: maius ergo valet $\frac{1}{2}$℞ + 45. Si iam 90 ad maioris precij poculum addantur, erit ſumma $\frac{1}{2}$℞ + 135 tripla precij minoris poculi: Ergo cum precium minoris poſitum ſit 1℞, erunt hæc 3℞, his $\frac{1}{2}$℞ + 135 æqualia; & ſi ab vtraque parte tollatur $\frac{1}{2}$℞, hæc $2\frac{1}{2}$℞, his 135. Diuiſis ergo 135 per $2\frac{1}{2}$℞ prouenient 54, precium minoris poculi: cui ſi addantur 90, & ſumma per 2 diuidatur, inuenientur 72 precium maioris poculi.

Duodecimum. Quidam habet duo pocula, & vnum operculum. Alterum poculum æſtimatur 60 aureis, ſi operculum addatur poculo 60 aureorum, erit ſumma dupla precij poculi ignoti: ſi addatur operculum poculo precij ignoti, erit ſumma tripla precij poculi noti. Quæro quanti Ignotum poculum, & operculum æſtimentur? Cum ſumma ignoti poculi, & operculi ſit tripla precij noti poculi, valebunt ſimul 180 aureos: Si igitur numerus 180 ita diuidatur, vt vna pars cum 60 ſit dupla partis alterius, proueniet precium operculi. Sint ergo partes 1℞, & 180 — 1℞,

Addan-

Addantur 60 ad 1ℛ, vt fiant 1ℛ + 60, quæ cum iam dupla ſit partis 180 — 1ℛ, ſi 180 — 1ℛ duplicentur, erunt hæc 1ℛ + 60, his 360 — 2ℛ æqualia, &, facta reductione hæc 3ℛ, his 300. Diuiſis ergo 300 per 3ℛ proueniunt 100, precium operculi, alterum ergo poculum valebit 80. au.

Decimum tertium. Eſt progreſſio Arithmetica 12 terminorum, ſumma omnium eſt 282, differentia 3. Quæro quis ſit primus terminus? Pono 1ℛ: ergo vltimus erit 33 + 1ℛ per 1. regul. progreſſ. Arithmet. Summa primi, & vltimi 33 + 2ℛ, quæ ducta in 6, ſemiſſem terminorum, facit 198 + 12ℛ, æqualia his 282: igitur facta reductione, & diuiſione, erit terminus primus 7.

Decimum quartum. Quinq; vlnæ panni nigri, & 7 panni rubri valent 110 aureos, & eodem precio 11 vlnæ panni nigri, & 15 rubri valent 238. au. Quid vna vlna panni nigri, quid vna rubri valet? Pono vnam nigri valore 1ℛ: quinque ergo valent 5ℛ, ac proinde 7 rubri valebunt 110 — 5ℛ. Eodem modo 11 vlnæ nigri valebunt 11ℛ, quindecim rubri 228 — 11ℛ. Si iam dicas, 7 vlnæ panni rubri valent 110 — 5ℛ, quid valent 15, reperies $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$ℛ; ſed & valent 238 — 11ℛ. Sunt igitur $235\frac{5}{7}$ — $10\frac{5}{7}$ℛ, & 238 — 11ℛ æqualia; factaque reductione, $\frac{2}{7}$ℛ, & $2\frac{2}{7}$: Diuiſis igitur $2\frac{2}{7}$ per $\frac{2}{7}$ℛ, proueniunt 8; atque tot aureos valet vna vlna panni nigri, & quinque, 40; quibus ex 110 ſubtractis, reſtant 70: ergo cum 7 vlnæ panni rubri valeant 70 aureos; valebit vna, 10. Rurſus cum 11 vlnæ panni nigri valeant 88

aureos

aureos, valebunt 15 rubri (ſubtractis 88 ex 238) 150: ergo vna 10.

ARTICVLVS III.

EXEMPLA, QVÆ EXtractio radicis ſoluit.

Primum. Dentur duo numeri in dupla proportione, quorum quadrata in ſe ducta faciant 58564. Pono primum 1℞: erit ergo ſecundus 2℞; horum quadrata 1q, 4q in ſe ducta faciunt 4qq. Quare hæc 4qq, his 58564 ſunt æqualia. Diuiſis ergo 58564, per 4qq, proueniunt 14641, quorum radix biquadrata, propter characterem qq, eſt 11, numerus primus: erit igitur ſecundus 22.

Secundum. Dentur duo numeri in tripla proportione, quorum cubi coniuncti faciant 9604. Ponatur primus 1℞ erit ergo alter 3℞; horũ cubi coniuncti faciunt 28℞; ſunt ergo 28 ce, & 9604 æqualia. Quare diuiſis 9604 per 28ce proueniunt 343, cuius radix cubica (propter characterem ce) eſt 7, numerus primus: erit ergo ſecundus 21.

Tertium. Inueniantur duo numeri, quorum differentia ſit 10, faciantq; numeri illi in ſe ducti 459. Ponatur primus 1℞: erit igitur alter 1℞+10: hi numeri in ſe ducti faciunt 1q+10℞. Sunt ergo hæc 1q+10℞, his 459 æqualia: & ſi ab vtraque parte tollantur 10℞, erit & 1q, his 459 — 10℞, æquale. Cum ergo hi tres numeri ſeruent proportionem Arithmeticam, eorumq; exponentes ſint 2.0.1. poterit ex illis radix quadrata extrahi. Diuiſis igitur 459 — 10℞, per 1q, proueniunt

459

459 — 10ʑ: huius numeri radices ſunt 17, & 27. Nam ſemiſſis numeri radicum eſt 5, eius quadratum 25, ad quod additus abſolutus, propter ſignum +, facit 484; huius numeri radici quadratæ 22, ſi addatur, & ſubtrahatur ſemiſſis numeri radicum 5, prodeunt dicti numeri 17 & 27.

Quartum. Sit numerus 20 in duas partes diuidendus, hac lege, vt partes in ſe ductæ, gignant 91. Pono primam partem 1ʑ: erit igitur altera 20 — 1ʑ, quæ in in ſe ductæ faciunt 20ʑ — 1q, æqualia his 91. Factæ reductione, erunt hæc 20ʑ — 91, huic 1 q æqualia. Quibus ex numeris, cum eorum exponentes 1. 0. 2, ſeruent proportionem Arithmeticam, poteſt extrahi radix quadrata. Diuiſis enim 20ʑ — 91 per 1 q, proueniũt 20ʑ — 91. Ex quo iam extrahitur radix quadrata. Semiſſis numeri radicum eſt 10; ex cuius quadrato 100 ſubtractus abſolutus propter ſignum —, relinquit 9; cuius radix 3 addita, & ſubtracta ſemiſſi, exhibet partes 13 & 7, in quas numerus 20 diuidendus proponebatur.

Quintum. Quæratur numerus, qui maior ſit alio quodam numero 6. alio minor 8, faciantque illi duo numeri in ſe ducti 9752. Sit numerus ille 1ʑ: ergo 6 vnitatibus illo maior erit 1ʑ + 6; minor vero 8 vnitatibus, erit 1ʑ — 8. Hi numeri in ſe ducti, faciunt 1q — 2ʑ — 48, quæ ſunt æqualia his 9752; & facta reductione, erit 1q, his 9800 + 2ʑ æquale. Dimidium numeri radicum eſt 1, ad cuius quadretum 1, abſolutus additus propter ſignum +, facit 9701: ad huius vero numeri radicem quadratam 99, additum dimidium numeri radicum, facit 100, qui eſt numerus quæſitus: maior

ior illo 6 vnitatibus eſt 106, minor 8, eſt 92; at hi duo numeri in ſe ducti faciunt 9752: ergo quæſtio ſoluta eſt.

Sextum. Diuidatur numerus 12 in duas partes, vt quod ex multiplicatione partium fit, diuiſum per partium differentiam, reddat $17\frac{1}{2}$. Partes ſunt prior. 1℞; altera 12—℞, quæ in ſe ductæ faciunt 12℞—1q. Differentia partium eſt 2℞—12: nam ſi 12—1℞, ex 1℞ ſubtrahantur, reſtant 2℞—12; per quã differentiam ſi 12℞ — 1q diuidantur, erit quotus $\frac{12℞-1q}{2℞-12}$; qui eſt æqualis numero $17\frac{1}{2}$. Hi duo numeri ducti ad eandem denominationem faciunt $\frac{24℞-2q}{1℞-24}$, & $\frac{70℞-420}{4℞-24}$, quæ ſunt etiam æqualia. Abiecto ergo denominatore communi, erunt quoque numeratores 24℞ — 2q, & 70℞ — 420, æquales facta reductione, erunt hæc 2q, his 420 — 46℞ æqualia. Diuiſis iam 420 — 46℞ per 2q, proueniunt 210—23℞. Semiſſis numeri radicum eſt $11\frac{1}{2}$, ad eius quadratum $132\frac{1}{4}$, abſolutus propter ſignum + additus, facit $342\frac{1}{4}$: ex huius radice quadrata $18\frac{1}{2}$, ſi ſemiſſis numeri radicum, propter ſignum —, ſubtrahatur, reſtant 7, pars maior; erit ergo minor 5. Nam hi numeri in ſe ducti faciunt 35, qui numerus per eorum differentiam 2 diuiſus, reddit quotum $17\frac{1}{2}$.

Septimum. Dentur duo numeri, quorum differentia ſit 8, hac lege, vt ſi differentia quadratorum ipſorum ſubtrahatur ex ipſorum rectangulo, relinquatur. 1. Pono primum eſſe 1℞: erit ergo alter 1℞+8. Quadrata ipſorum ſunt 1q, & 1q+16℞+64; differentia quadratorum eſt 16℞+64; qua ex rectangulo ipſo-

ipſorum, quod eſt $1q + 8 ℞$, ſubtracta, relinquuntur $1q - 8 ℞ - 64$, quæ ſunt æqualia. 1. Si igitur vtrique parti addantur 64, erunt hæc $1q - 8 ℞$, his 65 æqualia. Si rurſus vtrique parti addantur $8 ℞$, erit & hoc 1q, his $65 + 8 ℞$ æquale, cuius radix 13, eſt numerus minor: erit ergo maior 21.

Octauum. Sunt tres numeri proportionales, quorum ſumma eſt 91. medius 21. quæro qui ſit primus, qui tertius? Pono primum eſſe $1 ℞$; & cum ſecundus ſit 21; erit tertius $70 - 1 ℞$. Quoniam verò quando tres numeri ſunt proportionales, eſt rectangulum extremorum, æquale quadrato medij, fit vt hæc 441, his $70 ℞ - 1q$ ſint æqualia; & ſi vtrique parti addatur 1q, erunt & hæc $441 + q$, his $70 ℞$ æqualia: rurſus ſi ab vtraque parte demantur 441, erit & hoc 1q, his $70 ℞ - 441$ æquale. Semiſſis numeri radicum eſt 35, eius quadratum 1225, vnde ſubtractus abſolutus, relinquit 784, huius numeri radix 28 addita ſemiſſi, facit 63, ſubtracta ex eodem relinquit 7. Sunt igitur hi tres numeri 7. 21. 63 ſimul facientes 91, quæſiti, ſunt enim, vt quæſtio volebat, proportionales.

Nonum. Dentur duo numeri, quorum quadrata habeant proportionem hanc $\frac{4}{9}$, faciantque quadrata cum numeris, 1628. Quia quadrata ponuntur habere proportionem hanc $\frac{9}{4}$, habebunt numeri hanc $\frac{3}{2}$ (numeri enim 3, 2, ſunt numerorũ 9, & 4 radius.) Quare ſi primus numerus ponatur $1 ℞$: erit alter $\frac{3}{2} ℞$: ſumma quadratorum eſt $\frac{13}{4} q$, ſumma numerorum $\frac{5}{2} ℞$: ergo hæc $\frac{13}{4} q + \frac{5}{2} ℞$ ſunt his 1628, æqualia; & ſi ab

ſi ab vtraq; parte tollantur $\frac{5}{2}\mathcal{R}$, hæc $\frac{1}{4}q$, his 1618 — $\frac{5}{2}\mathcal{R}$: diuiſis ergo 1628 — $\frac{5}{2}\mathcal{R}$ per $\frac{1}{4}q$, proueniunt 500 $\frac{12}{13}$ — $\frac{10}{13}\mathcal{R}$. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{5}{13}$, eius quadratum $\frac{25}{169}$, ad quod additus abſolutus, facit 501 $\frac{12}{169}$: ex huius radice quadrata 22 $\frac{5}{13}$: ſi tollatur ſemiſſis numeri radicum, reſtant 22, numerus primus: ergo cum alter ad hunc proportionem habeat ſeſquialteram, hoc eſt talem, qualis eſt inter 3 & 2, erit alter 33.

Decimum. Duo caupones habent vinum. Primus 80; alter 120 menſuras, vendit poſterior vnam menſuram vno aureo carius, quam prior: venditione peracta, habent ambo ſimul 44 aureos. Quæro quot menſuras quilibet vno aureo vendiderit? Pono priorem vno aureo vendidiſſe 1 $\mathcal{R}$: ergo alter vno aureo vendidit 1 $\mathcal{R}$ + 1, adeoq; prior omnes $\frac{80}{1\mathcal{R}}$; poſterior omnes $\frac{120}{1\mathcal{R}+1}$ aureis vendidit. Hæc ſimul faciunt $\frac{200\mathcal{R}+80}{1q+1\mathcal{R}}$, quæ ſunt his 44 æqualia, ſiue his $\frac{44}{1}$. Quæ ſi ad eandem denominationem reducatur, erunt hæc $\frac{200\mathcal{R}+80}{1q+1\mathcal{R}}$, his $\frac{44q+44\mathcal{R}}{1q+1\mathcal{R}}$ æqualia, ſublatoque communi denominatore, hæc 200 $\mathcal{R}$ + 80, his 44q + 44 $\mathcal{R}$. Facta ergo reductione, & diuiſione, proueniunt $\frac{39}{11}\mathcal{R} + \frac{20}{11}$, cuius numeri radix eſt 4: vendidit ergo prior 4 menſuras vno au, poſterior 5. Nam ſi diuidas 80 per 4, proueniunt 20. ſi 120 per 5; proueniunt 24, quæ ſimul faciunt 44, vt quæſtio voluit.

Sed extrahamus radicem quadratam ex hoc numero $\frac{39}{11}\mathcal{R} + \frac{20}{11}$. *Semiſſis numeri radicum eſt* $\frac{39}{484}$ *cui ſi addatur abſolutus* $\frac{20}{11}$, *ſiue* $\frac{880}{484}$, *fient* $\frac{2401}{484}$, *radices ſunt* $\frac{49}{22}$, *quæ ſi ſemiſſi numeri radicum addantur fient* $\frac{88}{22}$, *ſiue* 4.

Vndecimum. Detur numerus, ex cuius biquadrato ſi tollantur 10 quadrata, reſidua ſint 3400; 11.

Pona-

Ponatur numerus 1℞: erit eius biquadratum 1qq; ex quo ſi tollantur 10q, erunt hæc 1qq − 10q his 3400311. æqualia. Si vtrique parti addantur − 10q, erit & hoc 1qq, his 3400311 + 10q æquale. Radix numeri 3400311 + 10q eſt 1849, ex quo numero, cum numerus radicum habeat characterem hunc q, eruenda eſt radix quadrata, quæ eſt 43, qui numerus eſt 1ſ, qui quæritur.

Duodecimum. Detur numerus, cuius biquadratum, & cubus ſimul, ad 21 eius quadrata habeant proportionem, quam 36 ad 1. Ponatur numerus ille 1℞: erit igitur eius quadratum 1q, cubus 1ce, biquadratum 1qq. Quadrata 21 ſunt ad 1qq + 1ce, vt 1 ad 36. Ductis ergo 21q in 36, erunt hæc 1qq + 1ce, his 756q æqualia. Et ſi ab vtraque parte tollatur 1ce, erit hoc 1qq, his 756q − 1ce æquale. Hic locum numeri radicum tenet 1ce; abſoluti 756q. Exponentes horum characterum qq, ce, q, ſunt 4. 3. 2. ex quibus ſi ſubtrahatur 2, reſtant 2. 1. 0, vt proinde, abbreuiatis characteribus, 1q æquale ſit his 756 − 1℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{1}{2}$ ad cuius quadratum $\frac{1}{4}$ additus abſolutus, propter ſignum +, facit $756\frac{1}{4}$. Ex huius radice $27\frac{1}{2}$, ſi tollatur ſemiſſis numeri radicum $\frac{1}{2}$, propter ſignum −, reſtant 27, numerus quæſitus. *Abbreuiari autem nunc tantum characteres poſſunt, quando eorum exponentes ſunt numeri. Quando duo ſunt numeri, tertius 0, abbreuiari non poſſunt, vt in præcedente exemplo, in quo exponentes erant 4, 2, 0.*

Decimum tertiũ. Eſt alicuius progreſſionis Arithmeticæ ab vnitate incipientis sũma 91, differẽtia 4. Quæritur vltimus terminus. Pono eſſe 1℞. Ex quo ſi per regul. 4. progreſſ. Arith. tollo primũ reliquum per differentiã 4 diuido, & quoto vnitatẽ addo, habeo numerũ termino-

norū $\frac{1℞+3}{4}$, in cuius ſemiſſem $\frac{1℞+3}{8}$ ſi duco ſummam primi, & vltimi termini, nimirū $1℞+1$, ꝓduco $\frac{1q+4℞+3}{8}$, ſummam terminorum: ſed & 91, eſt eadem ſumma: ergo $\frac{1q+4℞+3}{8}$, & 91 ſunt æqualia, quæ ſi ad eandem denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erunt & hæc $1q+4℞+3$, his 728 æqualia, & facta reductione hoc $1q$, his $725-4℞$, cuius numeri radix 25, eſt terminus vltimus.

Decimum quartum. Quidam conficit milliaria 1090. Primo die vnum, ſecundo $\frac{1}{5}$ amplius: tertio rurſus $\frac{1}{5}$ amplius, & eadem deinceps differentia. Quæro quanto tempore totum iter abſoluat? Pono $1℞$ dierū. Vnde ſi toliam 1, & reſiduum ducam in differentiam $\frac{1}{5}$, productoq́ addam primum terminum, efficio $\frac{1℞+4}{5}$ vltimum terminum; per regul. 1. progreſſ. Arith. cui ſi addo primum, hoc eſt, 1, efficio $\frac{1℞+9}{5}$, quo in ſemiſſem numeri terminorum, nempe in $\frac{1}{2}℞$ ducto produco, $\frac{1q+9℞}{10}$, ſummam omnium terminorum; ſed & eadem ſumma eſt 1090; ſunt ergo $\frac{1q+9℞}{10}$ & 1090 æqualia: ergo & (facta reductione ad eoſdem terminos, & communi denominatore abiecto) hæc $1q+92℞$, his 10900; & ſi ab vtraque parte tollantur $92℞$, hoc $1q$, his $10900+92℞$, cuius numeri radix 100, eſt numerus dierum, quibus milliaria 1090 conficit.

ARTICVLVS IIII.

EXEMPLA SECVNDArum radicum.

In hoc exemplorum genere pro ſecundis radicibus ponun-

ponuntur literæ A, B, C, &c. quæ per reductionem ad primas reducuntur, vt exempla docebunt.

Primum exemplum. Inueniantur tres numeri, quorum primus cum 136, ſit duplus ſecundi, & tertij. Secundus cum 184, triplus primi, & tertij. Tertius cum 176, quadruplus primi, & ſecundi. Ponatur primus 1℞, qui quia cum 136, eſt duplus ſecundi & tertij, erunt ſecundus & tertius ſimul $\frac{1}{2}$℞+68, quibus ſi addatur 1℞, erunt omnes tres $1\frac{1}{2}$℞+68. Ponatur ſecundus 1A, qui ſi ſubtrahatur ex $1\frac{1}{2}$℞+68, reſtant primus & tertius, $1\frac{1}{2}$℞+68—1A. Quia vero ſecũdus cum 184, hoc eſt, 1A+184 triplus eſt primi & tertij, ſi $1\frac{1}{2}$℞+68—1A, in 3 ducantur, erũt hæc 1A+184, his $4\frac{1}{2}$℞+204—3A æqualia. Et ſi vtriq; parti addantur 3A, hæc 4A+184, his $4\frac{1}{2}$℞+204. Iterum ſi ab vtraq; parte tollantur 184, hæc 4A, his $4\frac{1}{2}$℞+20. Ergo ſi 4A æquantur his $4\frac{1}{2}$℞+20; æquabitur, 1A, his $1\frac{1}{8}$℞+5. Secundus ergo, qui ponebatur 1A, eſt $1\frac{1}{8}$℞+5. Ponatur tertius 1B: ergo primus, & ſecundus erunt $1\frac{1}{2}$℞+68—1B. Et quia tertius cum 176 eſt quadruplus primi, & ſecundi erunt hæc 1B+176, his 6℞+272—4B æqualia: & ſi vtriq; parti addantur 4B, hæc 5B+176, his 6℞+272. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur 176, hæc 5B, his 6℞+96. Quare ſi 5B æquantur his 6℞+96, æquabitur 1B, his $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$. Tertius ergo, qui ponebatur 1B, erit $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$. Cum igitur primus poſitus ſit 1℞, ſecundus, & tertius inuenti ſint $1\frac{1}{8}$℞+5, & $1\frac{1}{5}$℞+$19\frac{1}{5}$, erunt omnes tres $3\frac{13}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$. Sed quoque ſunt $1\frac{1}{2}$℞+68: ergo hæc $3\frac{13}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$, his $1\frac{1}{2}$℞+68 ſunt æqualia: & ſi ab vtraque parte tollantur $1\frac{1}{2}$℞, hæc $1\frac{33}{40}$℞+$24\frac{1}{5}$, his 68. Rurſus ſi ab vtraque parte tollantur $24\frac{1}{5}$, hæc $1\frac{33}{40}$℞,

his $43\frac{4}{5}$. Diuiſis ergo $43\frac{4}{5}$ per $1\frac{33}{40}$℞, proueniunt 24, numerus primus. Ergo ſecũdus, qui inuẽtus eſt $1\frac{1}{8}$℞ $+5$, erit 32: tertius verò, qui inuentus eſt $1\frac{1}{5}$℞ $+19\frac{1}{5}$, erit 48. Nam ſi 24 ducantur in $1\frac{1}{8}$℞, prouenient 27, quæ cum 5 faciunt 32. Et ſi 24 ducantur in $1\frac{1}{5}$℞, prouenient $28\frac{4}{5}$, quæ cum $19\frac{1}{5}$, faciunt 48. Quod autem inuenti tres hi numeri 24, 32, 48 quæſtioni ſatisfaciant, facile probabis.

Secundum. Tres habent pecunias, ſi ſecundus, & tertius dent primo $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ, habebit primus 100. Si primus, & tertius dent ſecundo $\frac{1}{4}$ ſuæ pecuniæ, habebit ſecundus 100. Si primus, & ſecundus dent tertio $\frac{1}{5}$ ſuæ pecuniæ, habebit tertius 100. Quæro quantum quilibet habeat? Pono primum habere 1℞; ſecundũ, & tertium 1A. Si ergo ſecundus, & tertius primo $\frac{1}{3}$ ſuæ pecuniæ dederint, habebit primus 1℞ $+\frac{1}{3}$A: quæ erunt æqualia his 100; & ſi ab vtraque parte tollatur 1℞ hæc $\frac{1}{3}$ A, his 100 — 1℞: quare & 1 A, his 300 — 3℞. Ergo ſecundus, & tertius, qui ponebantur habere 1 A, habent 300 — 3℞: ergo omnes tres habent 300 — 2℞. Ponatur ſecundus habere 1 B; quo ſubtracto ex 300 — 2℞, reſtant 300 — 2℞ — 1 B, pecunia primi, & tertij, cuius $\frac{1}{4}$ addita ad pecuniã ſecundi, facit $\frac{3}{4}$ B $+75$ — $\frac{1}{2}$℞. quæ ſunt æqualia his 100; & ſi ab vtraq; parte tollantur 75, hæc $\frac{3}{4}$ B — $\frac{1}{2}$℞, his 25. Si rurſus vtriq; parti addatur $\frac{1}{2}$℞, hæc $\frac{3}{4}$B, his $25+\frac{1}{2}$℞: ergo & 1 B, his $\frac{2}{3}$℞ $+ 33\frac{1}{3}$: ſecundus ergo, qui ponebatur habere 1 B, habet $\frac{2}{3}$℞ $+ 33\frac{1}{3}$.

Ponatur tertius habere 1 C: ergo primus, & ſecundus habent 300 — 2℞ — 1 C; cuius $\frac{1}{5}$ cum 1 C, facit $\frac{4}{5}$ $+$ 60 — $\frac{2}{5}$℞, æqualia his 100. Si ab vtraque parte tollantur

tur 60, erunt & hæc $\frac{4}{5}$ c $-$ $\frac{2}{5}$ ℞, his 40 æqualia. Si vtrique parti addantur $\frac{2}{5}$ ℞, hæc $\frac{4}{5}$ c, his $\frac{2}{5}$ ℞ $+$ 40: ergo & 1 c, his $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50. Tertius ergo, qui ponebatur habere 1 c, habet $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50. Cum ergo primus habeat 1 ℞, secundus $\frac{2}{3}$ ℞ $+$ 33 $\frac{1}{3}$, habebunt omnes tres 2 $\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83 $\frac{1}{3}$; sed & habent 300 $-$ 2 ℞. Hæc ergo 2 $\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83 $\frac{1}{3}$, his 300 $-$ 2 ℞ sunt æqualia: & si vtrique parti addantur 2 ℞, hæc 4 $\frac{1}{6}$ ℞ $+$ 83 $\frac{1}{3}$, his 300. Rursus si ab vtraque parte tollantur 83 $\frac{1}{3}$, hæc 4 $\frac{1}{6}$ ℞, his 216 $\frac{2}{3}$. Diuisis ergo 216 $\frac{2}{3}$ per 4 $\frac{1}{6}$ ℞, proueniunt 52, pecunia primi: secundus ergo, & tertius, qui inuenti sunt habere $\frac{2}{3}$ ℞ $+$ 33 $\frac{1}{3}$, & $\frac{1}{2}$ ℞ $+$ 50, habent 68, 76. Quæstionem legitime solutam eſſe facile probabis.

Tertium. Duo habent pecunias. Primus dicit secundo, si dederis mihi $\frac{1}{3}$ tuæ pecuniæ, habebo 110 aureos: secundus dicit primo, si dederis tu mihi $\frac{1}{4}$ tuæ, habebo 110: Quæro quot quilibet habeat? Pono primum habere 1 ℞, secundum 1 A. Si ergo secundus dederit primo $\frac{1}{3}$ A, habebit primus 1 ℞ $+$ $\frac{1}{3}$ A, hoc eſt 110: igitur facta reductione, erunt $\frac{1}{3}$ A, & 110 $-$ 1 ℞ æqualia: ergo 1 A, & 330 $-$ 3 ℞. Quare secundus, qui ponebatur habere 1 A, habet 330 $-$ 3 ℞. Cui si primus dederit $\frac{1}{4}$ ℞, habebit secundus 330 $-$ 2 $\frac{3}{4}$ ℞, hoc eſt, 110: facta ergo reductione erunt 220. & 2 $\frac{3}{4}$ ℞ æqualia. Quare diuisis 220 per 2 $\frac{3}{4}$ ℞ proueniunt 80, pecunia primi: ergo secundus, qui inuentus eſt habere 330 $-$ 3 ℞, habebit 90. Quæſtionem rectè solutam eſſe patet.

Quartum. Dentur tres numeri, hac lege, vt primus & tertius habeant proportionem duodecuplam ad secundum; secundus verò & tertius ad primum quinde-

decuplam; quæro qui ſint numeri? Eſto primus 1 2ϱ, tertius 1 A; ſumma 1 2ϱ + 1 A eſt duodecupla ſecundi: ergo ſecundus eſt $\frac{1\ 2\varrho + 1\ A}{12}$, cui ſi addo tertium 1 A, efficio $\frac{1\ 2\varrho + 13\ A}{12}$, qui numerus cum ſit quindecuplus primi 1 2ϱ: erunt 15 2ϱ, & $\frac{1\ 2\varrho + 13\ A}{12}$ æqualia; & ſi ab vtraque parte tollatur $\frac{1}{12}$ 2ϱ, erunt $\frac{13\ A}{12}$, & 14 $\frac{11}{12}$ 2ϱ æqualia: Igitur cum $\frac{13\ A}{12}$ dent 14 $\frac{11}{12}$ 2ϱ, dabit 1 A, 13 $\frac{10}{13}$ 2ϱ: ergo tertius, qui ponebatur 1 A, erit 13 $\frac{10}{12}$ 2ϱ, hic cum primo 1 2ϱ, facit 14 $\frac{10}{13}$ 2ϱ, qui numerus cum ſit duodecuplus ſecundi, erit ſecundus $\frac{16}{13}$ 2ϱ. Quare cum primi, & ſecundi ſit proportio, qualis eſt numerorum 13, & 16, tertius qui inuentus eſt 11 $\frac{10}{13}$ 2ϱ, erit 179. Habemus ergo tres numeros 13. 16. 179, qui id quod propoſitum eſt præſtant. Idque in terminis minimis; nam in maioribus alij eſſe poſſunt. Vt hi tres 26. 32. 358; & hi 130, 160. 1790. &c.

ANNOTATIO.

Hic notetur mirabilis natura numerorum. Nam ſi priores duos ſtatuas vnitate maiores, quam ſunt denominatores proportionis, ſemper inuenies primum, & ſecundum. Vt ſi ſint inueniendi tres numeri, hac lege, vt primus cum tertio ſit quadruplus ſecundi; ſecundus cum tertio quintuplus primi; erit primus 5, ſecundus 6. Tertius inuenitur, ſi vel ſecundus quadruplicetur, & ex producto auferatur primus; vel primus quintuplicetur, & ex producto auferatur ſecundus? Vtrum enim feceris, reperies 19, numerum tertium.

Sunt quædam quæſtiones, quæ facilius per primas, quam per ſecundas radices ſoluuntur. Prima. Quin-

que

que habent pecunias, omnes ſecluſo primo 154; omnes ſecluſo ſecundo 146: omnes ſecluſo tertio 140. Omnes ſecluſo quarto 160. Omnes ſecluſo quinto 172. Quæro quantum quilibet habeat? Si ponamus primum habere 1℞, habebunt reliqui tanto plus, aut minus 1℞, quanto numeri à quibus excludũtur, ſuperant, aut excedunt, numerum, à quo primus excluditur. Habebit igitur ſecundus 1℞+8, tertius 1℞+14, quartus 1℞−6; quintus 1℞−18: ergo omnes 5℞−2; ſed & habent 1℞+154; cum enim primus habeat 1℞, & quatuor reliqui 154, habebunt omnes 1℞+154: ſunt igitur 5℞−2, & 1℞+154, æqualia, & facta reductione, 4℞, & 156. Diuiſis ergo 156 per 4℞, prouenjunt 39 pecunia primi; habebit igitur ſecundus 47, tertius 53, quartus 33, quintus 21.

Secunda habetur apud Peletarium de radicibus ſecundis, quam & clarius habet habet pag. 345 ſuæ Algebræ. Quæ ſic habet. Quærantur duo numeri, quorum quadrata faciant 340: duo verò numeri in ſe ducti, faciant $\frac{6}{7}$ maioris quadrati. Pono primum eſſe 1℞; erit igitur ſecundus $\frac{6}{7}$℞; quadrata vtriuſque faciunt $\frac{85}{49}$q: ſunt ergo 340, & $\frac{85}{49}$ æqualia. Facta diuiſione: prodit quadratum maioris 196: igitur minoris erit 144, adeoque numeri ipſi 14 & 12.

Demonſtratio pendet ex 4 ſecundi Eucl: Cum enim quod ſit ex duobus numeris ſit medium proportionale inter quadrata numerorum, erit vt quadratum maioris, ad id quod ſit ex numeris, ita numerus maior ad minorem: ergo cum pono numerum maiorem 1℞, erit minor $\frac{6}{7}$℞.

ARTICVLVS V.

EXEMPLA GEOmetrica.

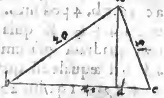
Primum. Eſt rectangulum, cuius maius latus eſt duplum minoris, minus 3 pedibus: area verò eſt 209 pedum quadratorum; quæro quanta ſint latera? Pono minus eſſe 1 ℞: erit igitur maius 2 ℞ — 3; hæc in ſe ducta faciunt 2 q — 3 ℞, quæ ſunt æqualia his 209: & ſi vtrique parti addantur 3 ℞, hæc 2 q his 209 + 3 ℞.

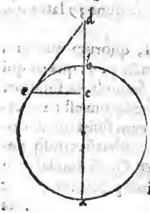
Diuiſis igitur 209 + 3 ℞, per 2 q, proueniunt 104 $\frac{1}{2}$ + 1 $\frac{1}{2}$ ℞. Semiſſis numeri radicum eſt $\frac{3}{4}$ eius quadratum $\frac{9}{16}$ additum ad abſolutum, facit 105 $\frac{1}{16}$: ad huius radicem 10 $\frac{1}{4}$, additus ſemiſſis, conflat 11, latus minus: igitur maius eſt 19, tribus vnitatibus minus quam 22, duplum minoris.

Secundum. Eſt columna rectangula, cuius latera baſeos habent proportionem duplam ſeſquiquintam, altitudo verò tripla eſt lateris maioris; eſt columnæ craſſities eſt pedum cubicorum 14520: quæro, quanta ſint latera, & altitudo? Si ponatur minus latus 1 ℞; erit maius 2 $\frac{1}{5}$ ℞, altitudo 6 $\frac{3}{5}$ ℞. Ducta latera in ſe faciunt 2 $\frac{1}{5}$ q; hoc in altitudinem creat 14 $\frac{13}{25}$ ce craſſitiem: igitur 14 $\frac{13}{25}$ ce ſunt æqualia his 14520; quibus per 14 $\frac{13}{25}$ + diuiſis, proueniunt 1000, cuius numeri radix cubica 10, eſt latus minus; erit ergo maius 22, altitudo 66.

Tertium. Eſt triangulum a b c, cuius latus maximum b c eſt 21, a b 20, a c 13 pedum. Quæro in quales partes perpendicularis a d lineam b c diuidat? Ponatur

natur b d 1℞: erit igitur d c 21 — 1℞: Et quia per penult. primi Euclidis quadratum lateris a b æquatur quadratis laterũ b d, a d; ſi ſubtraxero quadratum lateris b d ex quadrato lateris a b, reſtabit quadratum lateris a d. Eodem modo, ſi ſubtraxero quadratum lateris d c, ex quadrato lateris a c, reſtabit quadratum lateris a d. Igitur ſi ex 400, quadrato ipſius a b, ſubtraxero 1 q, quadratum ipſius b d, reſtabit 400 — 1 q, quadratum ipſius a d. Item ſi 441 — 42℞ + 1 q quadratum ipſius d c, ex 169, quadrato ipſius a c ſubtraxero, reſtabit 42℞ — 272 — 1 q, quadratum ipſius a d. Ergo 400 — 1 q, & 42℞ — 272 — 1 q ſunt æqualia, & facta reductione, 672 atq; 42℞. Diuiſis igitur 672 per 42℞, proueniunt 16, pars maior b d, quæ ponebatur 1℞: quare minor d c eſt 5. Quod verum eſſe hinc conſtat, quia ſi tam quadratum ipſius b d, ex quadrato ipſius a b; quam quadratum ipſius d c, ex quadrato ipſius a c ſubtraxero, reſtabit quadratum ipſius a d 144; ergo ipſa ad erit 12. pedum.

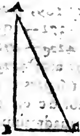




Quartum. Ad diametrum a b ducta eſt perpendicularis c e, quæ qualium diametrus eſt 20, talium ipſa eſt 8 pedum. Quæro in quas partes diametrus in c ſecta ſit, quãtæ item ſint b d, & d e. Quia quadratum perpendicularis c e eſt æquale rectangulo ſub a c, c b contento per 13 ſexti; ſi diuidatur a b ita, vt rectangulum ſub partibus

con-

contentum ſit æquale quadrato ipſius c e, inueniemus a c, 16. c b, 4 pedum. Ponatur b d 1 ℞: erit ergo tota c d 4 + ℞. Et quia per penult. primi & 36 tertij, tam quadrata ipſarum c d, c e, quam rectangulum a d, b d æquale eſt quadrato tangentis d e, ſit vt hæc 80 + 8 ℞ + 1 q, his 20 ℞ + 1 q ſint æqualia: & reductione facta, hæc 80, his 12 ℞. Diuiſis igitur 80 per 12 ℞, proueniunt $6\frac{2}{3}$, exterior b d, quæ poſita fuit 1 ℞: Ergo tota c d eſt $10\frac{2}{3}$, cuius quadratum $113\frac{7}{9}$, ſi quadrato ipſius c e iungatur, prodibit quadratum tangentis d e, adeoque & ipſa tangens, $13\frac{1}{3}$ pedum.



Quintum. Trianguli a b c, rectanguli latus b c ſit 15; ſumma duorum, a c, a b, 75 pedum: quæro quanta ſint latera a b, a c? Pono a c eſſe 1 ℞: erit igitur a b 75 — 1 ℞. Quadrata laterum a b, b c æquantur quadrato lateris a c, per penult. primi. Eſt igitur hoc 1 q, his 5850 — 150 ℞ + 1 q æquale; & ſi vtrique parti addantur 150 ℞, hæc 1 q + 150 ℞, his 5850 + 1 q. Rurſus ſi ab vtraque parte tollatur 1 q, hæc 150 ℞, his 5850. Ergo, facta diuiſione, proueniunt 39 latus a c, erit igitur a b, 36.

Sextum. Dentur duo numeri, quorum quadrata faciant 1250; numeri verò in ſe ducti 527; quæro qui ſint numeri? Hæc quæſtio per 4. ſecundi ita ſoluitur. Rectangulum numerorum inueniendorum eſt 527: ergo duo rectangula ſunt 1054, quæ cum ſumma quadratorum faciũt 2304, qui numerus eſt quadratũ vtriuſq; numeri ſimul: eſt ergo vterq; ſimul 48. Qui ſi diuidatur in duas partes, ea lege, vt partes in ſe ductę faciant 527, erũt numeri reperti 31, 17.

Alia

Alia ſolutio. Per 4. ſecundi, eſt duorum numerorum rectangulum medium proportionale inter duorum illorum numerorum quadrata. Poſito ergo quadrato primi 1q, erit ſecundi 1250 — 1q; proportionales ergo ſunt hi tres numeri 1q. 527. 1250 — 1q, & cum extremorum rectangulum æquale ſit quadrato medij per 20 Sept. Euclid. erunt 1250q — 1qq, & 277729 æquales, factaque reductione, 1qq, & 1250q — 277729. Semiſſis numeri radicum eſt 625, ex cuius quadrato 390625, ſi abſolutus tollatur, propter ſignum —, reſtant 112896, cuius reſidui radix addita ſemiſſi numeri radicum conſlat 961; ſubtracta relinquit 289. quorum numerorum radices quadratæ 31, & 17, ſunt numeri quæſiti. Sunt autem ex 961, & 289 radices quadratæ iterum extrahendæ, quod numeri radicum character fuerit hic q.

Septimum. Quærantur duo numeri, ex quorum quadratis ſi ſubtrahantur numeri ipſi, reſtent 320: ſi vero ei, quod ex numeris fit, rectangulo iidem addantur, fiant 191: quæro qui ſint numeri? Ponantur numeri 1℞. Si ergo 1℞ addatur ad 320, prodeunt quadrata vtriuſq; 320+1℞: ſi vero 1℞ ſubtrahatur ex 191, reſtat vtriuſque rectangulum 191 — 1℞; cuius duplum 382 — 2℞, additum ad ſummam quadratornm, conflat quadratum vtriuſque numeri ſimul 702 — 1℞. Et cum vterque numerus ſimul poſitus ſit 1℞: erit 1q quadratum vtriuſque ſimul: ergo 1q æquale eſt hinc 702 — 1℞, cuius numeri radix quadrata 26, eſt ſumma vtriuſque ſimul, qui ſi diuidatur in duas

par-

partes, vt in ſe ductæ faciant 165 (nam ſi 26 ex 191 ſubtrahantur, reſtant 165) prodibunt partes 11, & 15.

ARTICVLVS VI.

EXEMPLA CONTRA-ctè propoſita, & abſtractè ſoluta.

Aliquid contractè proponere, eſt illud practicè, & materialibus rebus coniunctum proponere. Abſtractè verò proponere aliquid, eſt illud à materialibus rebus ſeparatum proponere. Rem exempla declarabunt.

Primum. Quidam herus ſuo famulo quot diebus, ſi laboret, mercedem 12, ſi ocietur multam 8 cruciferorum imponit. Anno finito, nec herus famulo aliquid dat, nec famulus ab hero aliquid recipit. Quæro quot diebus laborarit, quot feriatus fuerit? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 365 (tot enim dies annus habet) in duas Partes, vt altera ducta in 12, tantum faciat, quantum altera ducta in 8. Ponatur prior 1ℨ; erit ergo poſterior 365 — 1ℨ. Si illa in 12; hæc in 8 ducatur, erunt producta 12ℨ, & 2920 — 8ℨ. æqualia: igitur reductione, atque diuiſione facta, proueniunt 146 dies laboris, qui ex 365 ſubtracti, relinquunt 219 dies ocij.

Secundum. Hoſpes quidam vendidit 30 vrnas vini 210 aureis, quarum vrnarum aliæ habuerunt album, aliæ rubrum vinum: vendidit autem vnam vrnam vini albi 5; vnam rubri 8 aureis. Quæro quot vrnæ fuerint

ſint albi, quot rubri vini? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 30 in duas partes, vt ſi vna pars in 5, altera ducatur in 8, producantur 210. Ponatur pars prior $1x$: erit ergo altera $30 - 1x$ Si illa in 5; hæc in 8 ducatur, producuntur $5x$, & $240 - 8x$, quæ addita conflant numerum hunc $240 - 3x$ æqualem huic 210. Facta iam reductione & diuiſione proueniunt 10, vrnæ vini albi, erunt ergo vini rubri vrnæ 20. Nam quinquies 10, faciunt 50: octies vero 20 faciunt 160, quæ ſimul faciunt 210.

Tertium. Sunt duo genera monetarum numero 1000, valentium au. 80: quorum alterius generis 10, alterius 20 valent vnum aureum. Quæro quot ſint quarum 10, quot quarum 20 vnum aureum valent? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Diuidatur numerus 1000 in duas partes, vt ſi vna per 10, altera diuidatur per 20, faciant duo illi quoti 80. Poſita priore parte $1x$, erit altera $1000 - 1x$. Diuiſa illa per 10, hæc per 20, proueniunt $\frac{1x}{10}$, & $50 - \frac{1x}{20}$, quæ ſimul faciunt $50 + \frac{1x}{20}$. Sunt ergo hæc $50 + \frac{1x}{20}$, his 80 æqualia. Facta reductione, & diuiſione, proueniunt 600, pars prior, erit ergo altera 400. Si enim 600 per 10; 400 per 20 diuidantur, proueniunt 60, & 20, quæ faciunt 80.

Quartum. Duæ ciuitates diſtant 228 milliaribus, ex quibus duo tabellarij exeunt, occurrentes ſibi 12 die, conficitque quotidie prior vno milliari amplius, quam ſecundus; quæro quot milliaria quilibet quot diebus conficiat? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponi poteſt. Quærantur duo numeri, quorum exceſſus ſit 1, vt ſi vterq; ducatur in 12, fiat ſumma productorum hæc 228. Nu-

Numeri ſunt 1℞ & 1℞ — 1: qui ducti in 12 faciunt 12℞, & 12℞ — 12; horum ſumma 24℞ — 12, eſt æqualis his 228. Facta reductione, & diuiſione reperitur maior 10; ergo minor 9; quare prior quot diebus 10, alter 9 milliaria conficit.

Quintum. In qualibet duarum militarium turmarum, quarum altera alteram 300 militibus ſuperat, diſtribuuntur 4000 aurei, & capit quilibet minoris turmæ 3 aureis amplius, quam quilibet maioris: quæro quot in qualibet turma ſint milites? Hæc quæſtio abſtractè ſic proponi poteſt. Diuidatur numerus 4000 per duos, quorum minor à maiore excedatur numero hoc 300, ſitque quotus prioris diuiſionis maior quoto poſterioris, numero hoc 3. Poſito diuiſore minore 1℞: erit maior 1℞ + 300, per quos ſi diuidatur numerus 4000, prouenient $\frac{4000}{1℞}$. & $\frac{4000}{1℞+300}$. Et quia quotus prior poſteriorem ſuperat hoc numero 3, addenda ſunt poſteriori 3, vt fiant $\frac{3℞+4900}{1℞+300}$. Sunt ergo iam $\frac{4000}{1℞}$, & $\frac{3℞+4900}{1℞+300}$ æqualia; & ſi ad eandem denominationem reducantur, communiſque denominator abiiciatur, 3q + 3900℞, & 4000℞ + 1200000. Reductione igitur, & diuiſione factis, prouenient 400000 — 100℞, cuius numeri radices ſunt 800, & 500, turmæ militum; nam ſi 4000 per illas diuidantur, prouenient 5 & 8, quorum poſterior priorem excedit 3, excedit quoq; maior turma minorem 300 militibus, & capit quilibet maioris turmæ 5, quilibet minoris 8 au. vt quæſtio voluit.

Sextum. Quidam emptis 100 vlnis panni rogatur quanti vnam vlnam emerit? Reſpondet, quanto minoris emi 40 vlnas, quam 80 aureis, tanto minoris

noris emiſſem 50 vlnas, quam 95 aureis. Hæc quæſtio abſtractè ſic proponitur. Quæratur numerus, qui ſi ducatur in 40, & 50, atque ex productis reijciantur 80, & 95, reſidua ſint æqualia, quæro qui ſit numerus? Ponatur numerus ille $1x$, qui ductus in 40, & 50, facit $40x$, & $50x$; ex quibus ſi demantur 80. & 95, reſtans $40x-80$, & $50x-95$, quæ ſunt æqualia. Reductione, & diuiſione factis, proueniunt $1\frac{1}{2}$, atque tanti emit vnam vlnam. Si enim vna conſtat $1\frac{1}{2}$ aureis conſtabunt 40, aureis 60, & 50, au. 75. Cum itaque & 60 minus ſint quam 80, & 75 minus quam 95, aureis 20, bene operati ſumus.

Septimum. Sunt duæ ſocietates, quarum altera alteram excedit 16 ſocijs, in quarum quamlibet ſumma pecuniæ diſtribuitur 688 aureis maior, quam ſit vtriuſque ſocietatis numerus; capitque quilibet minoris ſocietatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris. Quæro & quanta ſit pecuniarum ſumma, & quot in qualibet ſocietate ſocij? Ponatur ſocietatis minor $1x$, erit igitur maior $1x+16$: vtraque addita aureis 688, facit ſummam pecuniæ diſtribuendæ, hanc $2x+704$. Iam abſtractè ſic propono quæſtionem. Diuidatur numerus $2x+704$ per $1x$, & $1x+16$, vt quotus ex $1x$ proueniens, maior ſit quoto, ex $1x+16$ proueniẽte, numero hoc 8. Quoti ſunt $\frac{2x+704}{1x}$, & $\frac{2x+704}{1x+16}$ & cum prior ſuperet poſteriorem octonario, ſi poſteriori addantur 8, erunt hæc $\frac{2x+704}{1x}$ his $\frac{10x+832}{1x+16}$ æqualia; & reductis ad eandem denominationem, ſublatoque communi denominatore, hæc $10q+831x$ his $2q+736x+11264$, cuius radix 32, eſt ſocietas minor: erit igitur maior 48, Hæ ſocietates cum 688 aureis faci-

unt

unt 768, ſummam pecuniarum, quæ per 32 diuiſa, reddit 24; per 48 duntaxat 16; habet ergo quilibet minoris ſocietatis 8 aureis amplius, quam quilibet maioris.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

LIBER TERTIVS.

DE NVMERIS IRRAtionalibus abſolutis.

NVmeri irrationales abſoluti, ſunt radices eorum rationalium abſolutorum, qui radices rationales non habent. Exempli cauſa. Radix quadrata numeri 16, non eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 4. Nec radix cubica numeri 27, eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 3. Nec denique radix ſuperſolidi primi numeri 32, eſt irrationalis, ſed rationalis, eſt enim 2. At radix quadrata numeri 6, irrationalis eſt, ſiquidem numerus 6 non eſt quadratus. Et radix cubica numeri 20, irrationalis eſt, cum 20 non ſit numerus cubicus. Denique radix ſuperſolidi primi numeri 40, eſt irrationalis, quod 40 non ſit numerus ſuperſolidus. Signantur numeri irrationales, ſiue radices ſurdæ hoc modo, √q6, √ce20, √ß40. Primus ſignificat radicem quadratam, ex 6. Secundus radicem cubicam. ex 20. Tertius radicem ſuperſolidam primam ex 40. Iiſdem igitur chara-

characteribus notantur irrationales, quibus coſſici rationales; niſi quod irrationalibus characteres cum hoc ſigno √ præfigantur, coſſicis poſtponantur.

Numeri irrationales abſoluti, ſiue radices ſurdæ, diuidi poſſunt in ſimplices & compoſitas. Simplices à pleriſque mediales. quod per illas, inter duos numeros, quotcumque medij proportionales inueniri poſſint. Compoſitæ dicuntur, quod ſignis hiſce +, — copulentur, & diſiungantur. Diuiduntur compoſitæ in ligatas, vniuerſales, & diſtinctas. Ligatæ ſunt in quibus particulæ coniunctim accipiuntur. Exemplum in numeris rationalibus hoc eſto. √q36+√q16, quæ faciunt 10. Nam radix ex 36, eſt 6, radix verò ex 16, eſt 4: ſed 6 & 4, faciunt 10, quorum quadratum eſt 100.

Radix vniuerſalis eſt, quando primus character vtramque particulam afficit, qui à particulis puncto, aut parentheſi ſeiungitur hoc modo. √q. 22+√q9; aut hoc, √q(22+√q9.) Nam radix ſecundæ particulæ, √q9, eſt 3, quæ addita ad 22, particulam primam, facit 25, cuius radix eſt 5: totus ergo hic numerus √q(22+√q9) valet 5.

Diſtinctæ, quas quidam adferunt, ſunt eædem cum ligatis, niſi quod in illis particulæ ſeparatim accipiuntur, vt in exemplo de ligatis allato, √q36+√q16, particulæ non accipiuntur coniunctim, ſed ſeparatim, faciunt enim 6, & 4; non, vt in ligatis, 10.

Nos, hac diuiſione miſſa, illos numeros irrationales, in quibus primus character non vtramq; particulam afficit, vocabimus compoſitos, & diminutos: In quibus vtramq; afficit, vniuerſales.

Dicuntur à quibuſdam omnes numeri irrationales

 con-

conſtantes duabus particulis, & ſigno +, binomia. Cõſtantes duabus, & ſigno —, reſidua, ſiue apotomæ. Cõſtantes verò tribus particulis, & ſignis quibuſcumque, trinomia; conſtantes quatuor, quadrinomia.

Diſputari etiam hoc loco ſolet, ſintne radices irrationales, numeri an non. Sed numeros eſſe, duo argumenta ſuadent. Primum eſt, quod ex duobus irrationalibus produci poſſit rationalis, vt ex √q5 in √q20. fit 10. Alterum eſt, quod, vt inter duos numeros continuos, vt inter 2 & 3, infiniti cadunt fracti; ita inter eoſdem infiniti cadere poſſint irrationales, cuiuſmodi ſunt √q5. √q6. √q7. √q8. √q9. √q10. √q11. √q12. &c.

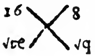
Capvt I.

In hoc cap. primo tradam elementa ſimplicium; ſecundo compoſitorum, & diminutorum, tertio vniuerſalium.

Articvlvs I.

DE ADDITIONE ET ſubtractione irrationalium ſimplicium.

Simplices irrationales, aut ſunt cõmenſurabiles, aut incommenſurabiles. Item, aut habent eoſdem, aut diuerſos characteres. Si habent diuerſos ad eoſdem ante operationem reducendi ſunt, hoc qui ſequitur, modo.



Simplices irrationales diuerſos habentes characteres, ad eoſdem reducere.

Collocentur numeri ſupra, characteres infra, vt hic apparet: deinde per crucem fiat multiplicatio talis, qualem character indicat. Poſtremo v-

triq;

triq; producto vterq; character præfigatur. Exemplum. Sint ad eoſdem characteres reducendi hi duo numeri √ce 16, & √q 8. Collocatione facta, multiplicetur 16 quadratè propter characterem √q per crucem ei reſpõdentem: 8 cubicè propter eandem cauſam, & producentur 256, & 512, quibus præfigatur vterq; character hoc modo √qce 512 + √qce 256.

His expoſitis ad elementa reuertimur. Ac qrimo quidē, ſi habeant diuerſos characteres reuocētur ad eoſdē, ac tunc ſi fuerint incōmenſurabiles addantur per +, ſubtrahantur per —. Quamquam non ſit neceſſe ad eoſdē illos characteres reducere, poſſunt. n. non reducti addi. Vt ſi √q8 ad √ce12, addenda ſint, fient √q8 + √ce12. Si √q8 ex √ce12 ſubtrahenda, reſtabunt √ce12 — √q8.

Si habeant eoſdem characteres, & incōmenſurabiles ſint, adduntur quoq; per +, ſubtrahuntur per —. Vt ſi √q 11, ad √q 13, addenda ſint, fient √q 11 + √q 13. Si √q 11 ex √q 13 ſubtrahenda reſtabunt √q 13 — √q 11. Poſſunt tñ radices incōmenſurabiles quadratę per 4. ſecundi Eucli. addi. Si nimirū ad ſumam quadratorum, addatur duplū eius, quod ex ipſis gignitur. Vt ſi √q 11 & √q 13 addenda ſint. Summa quadratorū eſt 24. (Nam quadratum irrationaliū, aut cubus, &c. habetur ſi ab ipſis character quadraticus, aut cubicus &c. tollatur, ita fit, vt horum duorū √q 11, √q 13, quadrata ſint 11 & 13, ſumma vtriuſq; 24) Id quod ex ipſis fit, √q 143, eius duplū √q 572: ergo ſumma √q(24 + √q 572.) Subtractio fit, ſi ex ſumma quadratorum, ſubtrahatur duplum eius, quod ex ipſis naſcitur, hoc modo. √q(24 — √q 572.)

Si ſint cōmenſurabiles, hoc eſt, ſi diuiſi per aliquam communem menſuram, quotos reddant quadratos, cubicos, biquadratos &c. ſic addūtur. Quotorum radices

adduntur, ſumma ad quadratum, cubum, biquadratum, &c. ducitur: quadratum, cubus, biquadratum, &c. ducitur in communem menſuram, & habetur ſumma. In ſubtractione radix quoti minoris ſubtrahitur ex radice maioris, reſiduum ducitur ad quadratum, cubum &c.

Exemplum. Sint addenda √q27, & √q12. Diuiſa per 3, communem menſuram, reddunt quotos quadratos 9 & 4, quorum radices 3, & 2 iunctæ faciunt 5, huius quadratum 25 ductum in 3 producit √q75, ſummam. Si √q12, ex √q27 ſubtrahenda ſint, ſubtrahitur radix minor 2, ex maiore 3, & reſtat, 1 cuius quadratum 1, ductum in 3, facit √q3, reſiduum.

Secundum exemplum. Sint hi tres numeri √q20, √q45, √q80 addendi: diuiſi per 5 reddunt quotos quadratos 4, 9, 16: quorum radices 2, 3, 4 iunctæ faciunt 9. huius quadratum 81, ductum in 5, producit √q405, ſummam omnium.

Tertium exemplum. Sint hi √ce108, √ce32 addendi. Diuiſi per 4 reddunt quotos cubicos 27, 8: ſumma radicum eſt 5, cuius cubus 125 ductus in 4 producit √ce500 ſummam. Sint iam √ce108, ex √ce500 ſubtrahenda. Diuiſa per 4, reddunt 27, 125, quotos cubicos, quorum radices ſunt 3, & 5; ſubtracta illa ex hac, relinquit 2, cuius cubus 8 ductus in 4, producit √q32. reſiduum.

Quando duo ſimiles adduntur, multiplicatur vnus eorum per 4: quando tres, per 9; quando quatuor, per 16 &c. Vt ſi ſint √q12, & √q12 addendi, ducitur √q12 in 4, vt fiant √q48. vtriuſque ſummam. Si tres √q12, √q12, √q12 ſint addendi, ducitur √q12 in 9, & fit ſumma hæc √q108, &c.

Arti-

Articvlvs II.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione ſimplicium.

Primò, quando multiplicantes eoſdem habent characteres, ducuntur numeri in ſe, retento communi charactere. Vt ſi √q20 ducenda ſint in √q18, producuntur √q360. Si √ce12 in √ce18, producuntur √ce216, hoc eſt, 6, quia 216 eſt numerus cubicus, & eius radix 6.

Secundò. Si rationalis in irrationalem ſit ducendus, reducendus eſt prius rationalis ad ſpeciem irrationalis, vt ad quadratum, cubum, biquadratum &c. prout irrationalis habuerit characterem √q. aut √ce, aut √qq, &c. Vt ſi ducenda ſint √q32 in 8, ducenda prius ſunt 8 ad quadratum, ac deinde √q32 in √q64 ducenda, vt producantur √q2048. Si 6 in √ce12, ducenda ſunt 6 ad cubum √ce216. Deinde √ce12 in √ce216 ducenda, vt producantur √ce2592.

Eodem modo ſi 8 diuidenda ſint per √q4, ducenda ſunt 8 ad quadratum, ac deinde √q64 per √q4 diuidenda, vt proueniant √q16, hoc eſt, 4. Item ſi diuidenda ſint 12 per √q8, diuidantur √q144, per √q8, proueniant √q18.

Tertiò. Si multiplicantes: vel diuidendus, & diuiſor habeant diuerſos characteres, ad eoſdem ante operationem reuocandi ſunt. Sint √ce16 per √q8 multiplicandi. Reducti ad eoſdem characteres, faciunt √qce

512 + √qce256. Hos in ſe ducto, & produces √qce13 1072. Sit quoque √ce8000 per √q16 (hoc eſt. per 4) diuidendus. Reducti ad eoſdem characteres, faciunt √qce64000000, & √qce4096. Diuiſo illo per hunc, prodeunt √qce15625, cuius radix quadrata eſt 125; huius cubica 5. Diuiſis ergo √ce8000 per √q16, prouenient 5.

Quartò. Quando numerus quadratè, cubicè, biquadratè, &c. multiplicatur, tollitur character, & res eſt perfecta. Vt ſi √q8 ſit quadrandus, fiunt 8: ſi √ce12 cubicè multiplicandus, fiunt 12: ſi √qq18 biquadratè, fiunt 18, &c. Simili modo radix quadrata numeri 8 eſt √q8. Radix cubica numeri 12, eſt √ce12. Radix biquadrata numeri 18, eſt √q18.

ANNOTATIO.

INTER DVOS NVMEROS datos, quotcumque medios proportionales inuenire.

Primò, diuidatur maior datus per minorem.

Secundò, progreſſio geometrica ab vnitate incipiens inſtituatur, terminos habens duobus amplius, quam quot ſunt medij inueniendi, cuius progreſſionis denominator ſit quotus antea inuentus.

Tertiò, ex terminis inuentis extrahantur radices. Quadrata quidem, ſi vnus duntaxat medius ſit inueniendus; cubica ſi duo; biquadrata ſi tres; ſuperſolida prima, ſi 4, &c.

Quartò, radices inuentæ ducantur in minorem numerum datum.

Exem-

Exemplum. Sint inter 3, & 768 tres medij proportionales inueniendi. Diuiſis 768 per 3, proueniunt 256. Primus ergo progreſſionis terminus eſt, 1. Secundus 256 tertius 65536, quartus 16777216, quintus 4294967296. horum terminorum radices quadratæ ſunt 1. 4. 16. 64. 256. quæ ductæ in minorem numerum datum 3, producunt 3. 12. 48. 192. 768. Sunt ergo hi tres termini 12. 48. 192, inter extremos datos 3 & 768 medij proportionales.

Aliud exemplum. Sint inter 4 & 12 quatuor medij inueniendi. Diuiſis 12 per 4, proueniunt 3. Progreſſio ſex terminorum hæc eſt 1. 3. 9. 27. 81. 243. Horum terminorum radices ſuperſolidi primi ſunt. 1. √ß 3. √ß 9. √ß 27. √ß 81. 3. Quæ ductæ in datum numerum minorem 4, producũt 4. √ß 3072. √ß 9216. √ß 27648. √ß 82944. 12. Debent autem √ß 3. √ß 9, &c. non in 4: ſed in eius ſuperſolidum primum, nimirum in 1024 duci, vt ex dictis manifeſtum eſt. Quando inter duos datos vnus tantum medius proportionalis inueniendus eſt, ducuntur dati in ſe, & ex producto radix quadrata extrahitur.

ARTICVLVS III.

DE ADDITIONE, ET *ſubtractione compoſitorum, & diminutorum.*

Si, quæ de Additione & ſubtractione coſſicorum rationalium circa ſigna +, & —. Item de additione & ſubtractione ſimplicium irrationalium, dicta ſunt, probè intelligantur, nulla hic difficultas erit. Nam & hic regulæ illæ locum habent.

Prima. *Eadem ſigna idem ſignum ponunt, niſi in ſubtractione, quando numeri præpoſterè ponuntur, tunc enim ſubtrahitur ſuperior ab inferiore, & ex + fit —; & ex — fit +.*

Secunda. *Diuerſa ſigna mutant ſpeciem operationis, & in additione ponitur ſignum maioris numeri; in ſubtractione verò ſuperioris, ſiue maior is ſit, ſiue minor, ſiue æqualis.*

Exemplum Additionis. In hoc exemplo duo priores numeri adduntur, vt de ſimplicibus dictum eſt. Duo ſecundi, vt rationales coſſici. Duo tertij mutant ſpeciem operationis, hoc eſt pro Additione fit ſubtractio.

√q50 + 20 — √ce24 + 12 — √q8
√q32 — 30 + √ce81 — √q32 + 4
√q162 — 10 + √ce3 + 16 — √q 2.
√q18 + 6 + √ce3.

Duo quarti cum ſint diuerſorum nominum, addi non poſſunt niſi per ſignum +; ſed adduntur ſimul quartus ſuperioris, & vltimus inferioris ordinis, quod vterque ſit rationalis. Item quartus inferioris, & vltimus ſuperioris ordinis, quod eoſdem characteres gerant. Iam vero, quia √q162 & √q72 ſunt eiuſdem generis, geritque √q162 ſignum +: √q72 verò ſignum —, fit, vt ſi hic ex illo ſubtrahatur reſtent √q18. Item, quia 10 gerit ſignum —; 16 verò +, fit, vt ſi 10 ex 16 tollantur, ſuperſint 6. Summa ergo omnium eſt √q18+6+√ce3.

Exemplum ſubtractionis. Duo ſecundi mutant ſpeciem operationis, hoc eſt, √q18 & √q50 adduntur, retẽto ſigno ſuperioris. Tertius ſuperioris ſubtrahitur à quar-

√q50 + √q18 + 8 — √q27 + √q48
√q18 — √q50 — √q12 + 10 + √q108
√q8 + √q128 — 2 — √q3 — √q12
√q200 — √q27 — 2.

quarto inferioris ordinis, & mutatur + in —, iuxta primam regulam. Tertius inferioris ſubtrahitur à quarto ſuperioris ordinis, & reſtant √q 3. Subtrahitur denique vltimus ſuperioris ab vltimo inferioris, & mutatur + in —, iuxta primam regulam. Quia verò √q 8, & √q 128, faciunt √q 200; Et — √q 3, atque — √q 12, faciunt √q 27, fit, vt reſtent √q 200 — √q 27 — 2.

ARTICVLVS IV.

DE MVLTIPLICATIONE, & diuiſione compoſitorum, & diminutorum.

Multiplicatio irrationalium compoſitorum, & diminutorum, fit per omnia, ſicut ſimplicium, dummodo circa ſigna regula de multiplicatione coſſicorum rationalium tradita, ſeruetur, quæ ſic habet

Eadem ſigna ponunt +, *Diuerſa* —. Addo vnicum exemplum. Sint 18 + √q 54, in 6 — √q 24 ducenda. Duco 6 in 18, & produco 108. Secundo, duco 6 in √q 54. & produco √q 1944. Tertio duco — √q 24 in 18, & produco — √q 7776. Quarto duco — √q 24, in √q 54, & produco — √q 1296, hoc eſt — 36. quæ ex 108 ſubtracta, relinquunt 72. Subtracta verò √q 1944 ex — √q 7776, relinquunt — √q 1944.

$$
\begin{array}{l}
18 + \sqrt{q}\,54 \\
6 - \sqrt{q}\,24 \\
\hline
108 + \sqrt{q}\,1944 - \sqrt{q}\,7776 - \sqrt{q}\,1296 \\
\hline
72 - \sqrt{q}\,1944.
\end{array}
$$

Notetur, quando numeri multiplicantes, diuerſos habent characteres, eos ante operationem ad eoſdem eſſe reuocandos, vt de multiplicatione ſimplicium diximus. Multiplicatio hæc deſumpta eſt ex 4. ſec. Euclid.

De diuiſione multa dici poſſent; ſed paucis me expedio. Aut enim diuiſor eſt ſimplex, aut compoſitus. Si ſimplex, per illum ſingulæ diuidendi particulæ ſunt diuidendæ, ſiquidem eoſdem cum diuiſore habeant characteres. Si diuerſos, ad eoſdem ante operationem ſunt reuocandæ. Exemplum. Sint √q48+√q20 per √4q diuidenda. Diuiſis √q48 per √q4 proueniunt √q12. Diuiſis vero √q20 per √q4, proueniunt √q5. Si vero √q200—√ce80, per 2 ſint diuidenda, prouenient √q50 — √ce10. Diuiſis enim √q200 per 2, hoc eſt per √q4, proueniunt √q50; diuiſis verò √ce80 per 2, hoc eſt, per √ce8, proueniunt √ce10.

Sint iterum diuidenda 12+√ce128, per √q8. Diuide 12, hoc eſt √q144 per √q8, & prouenient √q18. Diuide quoque √ce128, per √q8. Sed quia diuerſos habent characteres, ad eoſdem reducantur, ac deinde √qce16384, per √qce512 diuidantur, & prouenient √qce32.

Si diuiſor ſit compoſitus, ſintque particulæ radices quadratæ, aut biquadratæ, reducendus eſt diuiſor ad ſimplicem, hoc modo.

Signum poſterioris particulæ + mutetur in —; & — in +; atque in diuiſorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuiſor, vt producantur noui, diuidendus, & diuiſor.

Exemplum. Sint 60 per √q18+√q8 diuidenda. Duc tam 60, quam √q18+√q8, in √q18 — √q8, & pro-

duce

ducetur hic nouus diuidendus √q 64800 — √q28800; ſiue √q 7200: & hic nouus diuiſor 10. Diuiſis ergo √q7200 per 10, ſiue per √q100, proueniunt √q72.

Si diuiſor habeat tres particulas quadratas, aut biquadratas, mutetur particulæ vltimæ ſignum + in —; & — in +, inque diuiſorem hoc modo mutatum, ducatur tam diuidendus, quam diuiſor. Quo facto, ſi diuiſor fuerit ſimplex, benè quidem. Si compoſitus alia reductione opus erit.

Exemplum. Sint 120 diuidenda per √q50+√q32 +√q18, ducantur, tam 120, quam √q50+√q32+√q 18, in √q50+√q32 — √q18, & producentur √q7200 00+√q460800 — √q259200, hoc eſt, √q 1036800, nouus diuidendus, & 144, nouus diuiſor. Diuiſis ergo √q1036800 per 144, hoc eſt, per √q20736, proueniunt √q50.

Pro radicibus cubicis, ſuperſolidis, & alijs, vide Algebram Clauij cap. 23.

Articvlvs V.

DE VNIVERSALIVM calculo.

Hic priori loco de multiplicatione, & diuiſione agendum eſt. Multiplicaturus ergo numerum quemcunque vniuerſalem irrationalem in alium, duc ante operationem vtrumq; multiplicantem ad quadratum, aut cubum, &c.

Exemplum. Volo multiplicare √q (21+√q16) hoc eſt 5, per 7. Quadratũ multiplicandi eſt 21+√q16 (tollitur enim

enim duntaxat qui eſt ante parentheſin character) multiplicantis 49. Ductis ergo 21+√q16, in 49, proueniunt 1029+√q38416, hoc eſt, 35: nam radix quadrata poſterioris particulæ 196 addita priori, efficit 1225, cuius radix eſt 35.

Quando radix quadrata in ſuum reſiduum ducitur: ita agito. Connecte illa ſigno +, idq; duplici poſitu. Deinde vtriuſque quadratum ſimul iunge, cum eorum rectangulo bis ſumpto per 4. ſec. Eucl. Exemplum. Sint √q(10+√q24) in √(10—√q24) ducenda. Connecte illa ſigno +, & bis pone, vt in formula vides:

√q(10+√q24)+√q(10—√q24)
√q(10+√q24)+√q(10—√q24)
10+√q24+ 10—√q24
20+√q304

Deinde quadra vtramq; particulam, hoc eſt, tolle characterem ante parentheſin poſitum, & reperies 20: nam 10 & 10 faciunt 20. At √q 24, & —√q24. Se mutuo tollunt, propter diuerſa ſigna + & —. Poſtremo multiplica √q(10+√q24), in √q(10—√q24) per 4. ſec. Eucl. vt hic vides.

√q(10+√q24)
√q(10—√q24)
100—24
100
24
76

Nam particularum quadrata ſunt 100 & 24. At verò 10 in +√q24 facit √q2400: 10 autem in —√q24, facit —√q2400, quæ ſe mutuo tollunt, propter diuerſa ſigna. Subtractis tandem 24 ex 100, reſtant 76: cuius duplum, eſt 304: Ergo quod ex multiplicatione √q(+√q24) in √q(10—√q24) fit, eſt 20+√q304. Duplicaui autem 76, propter duplicem poſitum.

In

In diuiſione reducitur, tam diuiſor, quam diuidendus ad quadratum, poſtea fit diuiſio, vt ſupra. Sint enim $\surd q\,(72+\surd q\,162)$ diuidenda per 3, quadrata ſunt $72+\surd q\,162$, & 9. Diuiſis ergo 72 per 9, proueniunt 8: diuiſis verò $\surd q\,162$, per $\surd q\,81$, proueniunt $\surd q\,2$: ergo quotus eſt $\surd q\,(8+\surd q\,2.)$

Additio, & ſubtractio, fiunt per ſigna $+$ & $-$; nam aliter fieri commode non poſſunt, niſi in binomijs, & reſiduis, vbi per omnia fiunt, vt de multiplicatione binomiorum, & reſiduorum, iam iam diximus.

Nam ſi $\surd q\,(10+\surd q\,24)$ & $\surd q\,(10-\surd q\,24)$ addenda ſint, fient per multiplicationem $20+\surd q\,304$, cuius radix $\surd q\,(20+\surd q\,304,)$ eſt eorum ſumma. Si vero $\surd q\,(10-\surd q\,24)$ ex $\surd q\,(10+\surd q\,24)$ ſint ſubtrahenda, reſtant $20-\surd q\,304$, cuius radix $\surd q\,(20-\surd q\,304)$ eſt reſiduum.

ANNOTATIO DE FRACTIS.

De fractis hic nihil occurrit præcipiendum, ſicut nec in ſuperioribus, niſi quod eorum reductio, Additio, Subtractio, &c. per omnia fiant, vt de abſolutis rationalibus dictum eſt, dummodo habeatur ratio ſignorum, & characterum.

ARTICVLVS VI.

DE BINOMIIS ET reſiduis.

Binomium eſt numerus rationalis conſtans duobus nominibus, potentia tantum cōmenſurabilibus. Ab Euclide in 10 element. Sex duntaxat binomiorum, & reſi-

reſiduorum ſpecies recenſentur. Tres priores fiunt, quando quadratum maioris nominis ad exceſſum ſupra quadratum minoris, eſt, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. Tres poſteriores, quando quadratum maioris nominis, ad dictum exceſſum, non eſt, vt numerus quadratus ad numerum quadratum. Primum binomium eſt, quando maius nomen eſt longitudine, minus potentia rationale.

Secundum, quando maius eſt potentia, minus longitudine rationale.

Tertium, quando vtrumque potentia eſt rationale.

Idem de quarto, quinto, & ſexto intellige, vt hic cernis.

BINOMIA	APOTOMÆ
1. 3 + √q5.	1. 3 − √q5
2. √q12 + 3.	2. √q12 − 3.
3. √q8 + √q6.	3. √q8 − √q6.
4. 5 + √q20.	4. 5 − √q20.
5. √q14 + 3.	5. √q14 − 3.
6. √q10 + √q7.	6. √q10 − √q7.

Sex binomiorum ſpeciebus, reſpondent totidem reſiduorum, ſiue Apotomarum ſpecies. Vide plura apud Clau. in Alg. cap. 27.

ARTICVLVS VII.

DE RADICVM EXTRActione ex binomijs, & reſiduis.

Primò. Ex differentia quadratorum vtriuſq; nominis extrahe radicem quadratam.

Secun-

Secundò. Radicem inuentam, tum maiori nomini adde, tum ab illo ſubtrahe.

Tertiò. Radicem quadratam ſemiſſis illius ſumma coniunge cum radice quadrata ſemiſſis illius relicti per ſignum +, ſi fuerit binomium. Diſiunge per —, ſi fuerit apotome. Sit radix extrahenda ex hoc binomio 14+√q180. Quadrata particularum ſunt 196, & 180, differentia 16; differentiæ radix 4, quæ addita & ſubtracta maiori nomini conflat 18; relinquit 10. Horum ſemiſſes ſunt 9, & 5; ſemiſſium horum radices 3, & √q5. Quibus ſigno + connexis, reſultat radix quæſita 3+√q5 quam ſi duxeris in ſe quadratè, redibit. dictũ binomium 14+√q180. Si fuiſſet apotome hæc 14 — √q180, debuiſſent particulæ ſic diſiungi, 3 — √q5.

Demonſtratio pendet ex 4. prop. ſec. Eucl.

CAPVT II.

In hoc cap. exempla aliquot numerorum irrationalium abſolutorum per propoſitiones proponemus.

PROPOSITIO I.

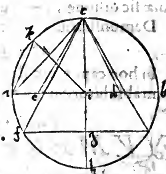
NVMERVM DATVM proportionaliter ſecare.

Sit numerus 8 hoc modo ſecãdus. Coniunge quadrata totius numeri 8, & ſemiſſis 4; nẽpe 64, & 16 efficieſq; 80, ex cuius radice √q80, ſi ſubtraxeris ſemiſſem, habebis ſegmentum maius √q80 — 4; hoc ſegmentũ ſubtractũ ex toto numero, relinquit ſegmentũ minus 12 — √q80. Hanc ſectionẽ veram eſſe, oſtenditur tum ex 11. ſec. Euclid. tum per additionẽ partium; tum per ductũ maioris ſegmẽti in ſe, & minoris in totũ. Nam ex additione ſeg-

ſegmentorum conflatur numerus totus 8; & tam ex ductu maioris in ſe; quam ex ductu minoris in totum, producitur hic numerus 96 — √q5120, qui eſt reſiduum primum, eius radix eſt √q80 — 4.

PROPOSITIO II.

DATA DIAMETRO CIRculi latera hexagoni, tetragoni, trigoni, pentagoni, octogoni, & decagoni inuenire.

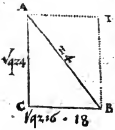


Sit diametrus ab 12 pedum: erit igitur ſemidiameter bi, 6; & tantum etiam eſt latus hexagoni per 15. quarti Euclid. Diuidatur ſemidiameter bi in d bifariam, ducta recta dc, eritque di, 3 pedum: ergo dc erit √q45 per 47. primi. Nam eius quadratum 45, æquale eſt quadratis ipſarum di, ic; quarum hæc eſt 6; illa 3 pedum. Abſcindatur de, ipſi dc æqualis, ex qua ſi ſubtrahatur di, erit ie √q45 — 3, quæ eſt latus decagoni per 9. decimi tertij, cum be in i ſit ſecta proportionaliter per 11. ſec. Rurſus quia quadratum ipſius ce æquale eſt quadratis ipſarum ci, ie per 47. primi; erit ce, √q(90 — √q1620) quæ eſt latus pentagoni per 10. decimi tertij. Latus tetragoni ac facile per 47 primi reperitur, eſt enim √q72. Latus denique

nique trigoni c f, erit per 12. decimi tertij √q108. eſt enim potentia triplum ſemidiametri b i per 12 duodec. Latus octogoni a k ſic inuenitur. Cum a c ſit √q72, erit a l √q18, cui cum æqualis ſit i l, relinquet i l ex i k ſubtracta k l, 6 — √q18. Notis ergò a l, l k, erit a k, √q (72 — √q2592) latus octogoni.

PROPOSITIO III.

DATIS TRIANGVLI RE*ctanguli duobus lateribus, latus tertium, & aream inuenire.*



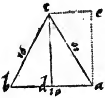
Sit triangulum a b c rectangulum, ſitque latus a b 24: b c 18 pedum: erit igitur per 47 primi, a c √q252. Et quia per 41 primi parallelogrammum c d duplum eſt trianguli a c b, ſit autem area parallelogrammi ex ductu laterum b c, c a in ſe: ergo area trianguli naſcetur ex ductu lateris a c in ſemiſsem b c; vel contra, ſemiſſis lateris b c eſt 9 pedum: ductis ergo 9, hoc eſt √q81 in √q252, prouenit area trianguli √q820412. Sit ſecundo latus c b, √q216; i a √q24 erunt ergo eorũ quadrata 216, 24: ergo quadratum lateris a b, erit 240: ergo latus ipſum √q240.

Et quia ex ductu lateris a c in ſemiſſem lateris c b, vel contra, producitur area trianguli, & eſt ſemiſſis lateris b c, √q54, ſit vt area trianguli ſit √q1296, ſiue 36.

L PRO-

PROPOSITIO IV.

DATIS TRIANGVLI æquilateri, vel iſoſcelis omnibus lateribus, aream inuenire.



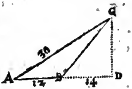
Sint trianguli æquilateri a b c omnia latera 10 pedum. Diuiſa ergo baſi a b in d bifariam, erit per 41. primi parallelogrammum d e, æquale triangulo a b c: area autem parallelogrammi creatur ex ductu lateris a d in latus d c: ergo & area trianguli a b c. In triangulo a d c rectangulo, latera a d, a c ſunt nota, hoc 10, illud 5 pedum: erit igitur per 47 primi perpendiculum d c, √q 75, quo ducto in latus a d, proueniunt √q 1875, area trianguli a b c. Si baſis a b ſtatuatur √q 80, erit area trianguli a b c √q 1500. Nam ſemiſſis baſis √q 20 ducta in √q 75 d c producit √q 1500.

PROPSITIO. V.

DATIS TRIANGVLI ſcaleni duobus lateribus, vna cum linea in directum baſi ducta, in quam cadit perpendiculum ex angulo baſi oppoſito demiſſum, aream inuenire.

Sint

Sint trianguli a b c ſcaleni latera a c 30; a b 12 pedum: exterior linea b d 14. Sunt igitur in triangulo rectangulo a d c duo latera a c, a d nota; ac quidem 30; a d verò 26 pedum.

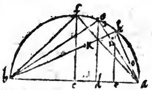


Quare c d erit √q224 per 47. primi; b c verò √q420. Et quia per 41 primi, triangulum a b c æquale eſt parallelogrammo ſub d c, & ſemiſſe ipſius a b contento, ſi ducatur d c in 6, hoc eſt, √q224 in √q36, prouenient √q8064, area trianguli a b c.

PROPOSITIO VI.

LATERA QVINQVE corporum regularium eidem ſphæræ inſcriptorum, data ſphæræ diametro inuenire.

Ponatur diametrus a b 30 partium, quæ diuidatur in c bifariam: in d ita, vt a d ſit tertia; in e, vt a e ſit quinta pars diametri. Ductis perpendicularibus f c, g d, h e, & iunctis b f, b g, b h; a f, a g, a h, diuidantur a h, a g proportionaliter in o; & i per 11 ſec. & maius ſegmentum ipſius a h transferatur ex h in k, ducta a k.



Quo facto, erit b g latus tetrahedri, b f octahedri; a g cubi; a k icoſahedri; a i dodecahedri. Poſita namq; diametro 30 partiũ, erit d g, cũ inter a d, d b ſit media ꝓportionalis, √q200;

bg latus tetrahedri, $\sqrt{q}600$; bf, $\sqrt{q}450$; ag $\sqrt{q}300$; ah, $\sqrt{q}180$, cuius maius ſegmentũ eſt æquale ipſi hk, quod eſt, $15 - \sqrt{q}45$. Datis ergo ah, hk, dabitur & ak $\sqrt{q}(450 - \sqrt{q}40500)$ latus icoſahedri. Deniq; ag eſt $\sqrt{q}300$, cuius maius ſegmentum ai, $\sqrt{q}375 - \sqrt{q}75$. eſt latus dedocahedri. Videatur 18. propoſ. 13. Euclid.

INSTITVTIONVM ARITHMETICARVM.

Liber Qvartvs.

DE NVMERIS IRRATIONALIBUS coſſicis.

NVmeri irrationales coſſici duplici notantur charactere, hoc modo, $\sqrt{q}20$℞, quorum prior ſignificat radicem quadratam ex 20, ſecundus 20 radices; ipſe verò numerus ſic pronunciatur. Radix quadrata viginti radicum. Poſſunt numeri irrationales coſſici, pro ratione valoris vnius radicis, interdum eſſe rationales. Vt ſi huius $\sqrt{q}20$℞, vna radix valeret 5, eſſet ipſe rationalis, quod quinquies 20 faciant 100, qui numerus quadratus eſt, & pro radice habet 10. Si vero vna radix valeret 4, irrationalis eſſet, quoniam $\sqrt{q}80$℞, qui ex 20 & 4 creatur, non eſt numerus quadratus. De his numeris duo breuiter pertractabo.

Primum eſt calculus, alterum vſus & praxis.

Capvt

Caput I.

De calculo irrationalium coſſicorum.

Componitur horum numerorum calculus ex triplici calculo, nimirum ex calculo rationalium coſſicorum, & abſolutorum, atque ex irrationalium abſolutorum.

Si enim incommenſurabiles fuerint, fit additio per +; ſubtractio per —. Si commenſurabiles & eoſdem characteres coſſicos habuerint adduntur & ſubtrahuntur, vt commenſurabiles irrationales abſoluti. Vt ſi √q 8 ꝛ ad √q 18 ꝛ addantur, fient √q 50 ꝛ. Si √q 8 ꝛ ſubtrahantur ex √q 50, reſtant √q 8 ꝛ.

Multiplicatio. & diuiſio fit etiam, vt in ſuperioribus, ſi eoſdem habeant characteres radicales. Si diuerſos, ante operationem ad eoſdem reuocantur, vt ſupra etiam factum eſt. Exemplum ſi ſint √q 12 ꝛ in √q 8 ꝛ ducenda, fient √q 96 q. Si 6 ꝛ in √q 18 q, fient √q 648 ce. Si √q 96 q ſint per √q 8 ꝛ diuidenda, prouenient √q 12 ꝛ. Si √q 648 ce per √q 18 q, prouenient √q 36 ꝛ, hoc eſt 6 ꝛ.

Si characteres radicales ſint diuerſi reducuntur prius ad eoſdem. Vt ſi ſint √q 8 ꝛ per √ce 16 ꝛ multiplicanda, reducantur hoc modo.

Numeri cum characteribus coſſicis ponuntur ſupra, characteres radicales infra. Deinde fit multiplicatio per crucem; iuxta characteres per crucem re-

8 ꝛ   16 ꝛ
q   ce
√qce 256 q + √qce 512 ce

 ſpon-

ſpondentes. Vt quia 8℞ reſpondet per crucem character ce, ducenda ſunt 8℞ ad cubum. 16℞ verò propter characterem q, per crucem reſpondentem, ad quadratum. Deinde vtrique producto addendus vterque character radicalis. Coſſicus vero mutatur, vt ſupra de multiplicatione coſſicorum eſt dictum. Operatione hoc modo abſoluta, proueniunt √qce 256q + √qce 512ce; quibus in ſe ductis producuntur √qce 131072ß. Quod ſi √qce 131072ß per √qce 256q ſint diuidenda, prouenient √qce 512ce.

CAPVT II.

DE VSV ET PRAXI NVmerorum irrationalium coſſicorum.

PROPOSITIO I.

EST QVADRATVM, cuius latus, & diametrus ſimul faciunt 10. Quæro quantum ſit latus, quanta diametrus?

Pono latus 1℞: Ergo erit diametrus 10 — 1℞. Et quia per 47 primi quadratum diametri eſt duplum quadrati lateris, eſtque quadratum lateris 1q; quadratum diametri 100 — 20℞ + 1q, erunt hæc 2q, his 100 — 20℞ + 1q æqualia; & facta reductione hoc 1q, his

100

100 — 20℞. Semiſſis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100, additum abſoluto 100 facit 200, cui ſi addatur ſemiſſis numeri radicum, erit latus √q 200 — 10, quod ex 10 ſubtractum, relinquit diametrum 20 — √q 200.

PROPOSITIO II.

EST QVADRATVM, cuius latus ductum in differentiam lateris, & diametri, producit 10, quæro latus, & diametrum.

Pono latus 1℞, per quod ſi diuidantur 10, prodit differentia lateris, & diametri $\frac{10}{1℞}$, cui ſi addatur 1℞ prodit diametrus $\frac{10}{1℞}$ + 1℞, ſiue (particulis ad eundem denominationem ductis) $\frac{10+1q}{1℞}$, huius quadratum $\frac{100+20q+1qq}{1q}$, cum quadrati lateris ſit duplum, erit inter 2q, & $\frac{100+20q+1qq}{1q}$ æqualitas. Quæ ſi ad eandem denominationem reducantur, & communis denominator tollatur, erit etiam inter 2qq, & 100 + 20q + 1qq æqualitas, & reductione facta, inter 1qq, & 100 + 20q. Diuiſis ergo 100 + 20q per 1qq, proueniunt 100 + 20q. Semiſſis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100 additum abſoluto facit 200; cuius radici √q 200 ſi addatur ſemiſſis numeri radicum, conflantur √q 200 + 10, quadratum lateris: ergo quadratum diametri eſt √q 800 + 20; adeoque diametrus √q(√q 800 + 20.) & latus √q(√q 200 + 10.)

Subtractum latus ex diametro relinquit √q (√q800 +20) — √q (√q200+10) Ducto iam latere √q (√q200 +10,) in √q (√q800+20) — √q (√q200+10,) producuntur 10. Quæ multiplicatio fit hoc modo.

Ex √q (√q200 + 10) in — √q (√q200+10) fit quadratum lateris, tollitur enim dũtaxat characterante parentheſin, & propter diuerſa ſigna, ponitur ſignum hoc —.

√q(√q800+20) — √q(√q200+10)
√q(√q200+10) +√q (√q200+10)
———————————————
— √q 200+10

Ductis vero √q (√q 800+20) in √q (√q200+10) producuntur √q (√q 160000+√q8000 0 + √q 89000+200;) ſiue √q (√q 160000+320000+ 200,) & radice ipſius √q 160000, addita ad 200, fit hoc binomium (600+√q 320000) cuius binomij radix eſt 20 + √200: vnde ſi tollam — √q200+10, nempe quadratum lateris (√q√q200+10,) reſtant 10.

Propositio III.

Diuidatur numerus 100 in duas partes, quæ in ſe ducta progignant 1000.

Pono primam partem 1℞: erit igitur altera 100—1℞. hæ partes in ſe ductæ faciunt 100℞—1q, quæ ſunt his 1000 æqualia, & facta reductione hoc 1q. his 100℞— 1000. Si ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, nempe ex 2500 ſubtrahatur abſolutus, reſtant 1500. Cuius numeri radix quadrata √q1500, ſi addatur, & ſubtrahatur

hatur ſemiſſi numeri radicum, exurgunt partes, maior 50 + √q1500; minor 50 — √q1500. Hæ partes additæ faciunt 100. In ſe vero ductæ procreant 1000.

PROPOSITIO IV.

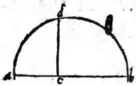
Diuidatur numerus 20 in duas partes, vt partes in ſe ductæ, faciant 52+√q2048.

Eſto pars prima 1℞: igitur altera erit 20 — 1℞. Hæ partes in ſe ductæ faciant 20℞ — 1q, æqualia his 52 + √q 2048. Facta reductione erit hoc 1q, his 20℞ — 52 — √q2048 æquale. Ex quo numero radix ſic extrahitur. Subtraho ex quadrato ſemiſſis numeri radicum, nempe ex 100, abſolutum — 52 — √q2048, & reſtant 48 — √q 2048, huius numeri radix eſt √32 — 4. Nam ſi quadratum minoris particulæ ex quadrato maioris ſubtrahatur, reſtant 256, cuius radix quadrata, ſi addatur, & ſubtrahatur maiori particulæ, fient 64 — 32: horum dimidia ſunt 32 — 16, radices √q32 — 4. Quæ ſi ſubtrahantur ex ſemiſſe numeri radicum, nempe ex 10, reſtabunt 14 — √q32; ſi eidem addantur, fient 6 + √q32. Hæ igitur duæ partes cum in ſe ductæ faciant 52+√q 2048; additæ, conſtant 20, bene operati ſumus.

PROPOSITIO V.

Eſt circulus, cuius diametrus eſt 20 partium, quæ vero ex peripheria in diametrum demittitur eſt √q(76 — √q320) quæro quæ ſint partes diametri à perpendiculari factæ?

Eſto circulus a d b, diametrus a b, perpendicularis ex d in diametrum demiſſa d c: quæro quantæ ſint a c, c b? Pono a, c eſſe 1 ꝛ: erit igitur c b 20 — 1 ꝛ. Et quia quod fit ex a c in c b æquale eſt quadrato ipſius c d per 13 ſexti; erit inter 20 ꝛ — 1 q, & 76 — √q 320 æqualitas (quadratur enim, √q (76 — √q 320) ſi prior character auferatur.) Ergo reductione facta, erit quoque æqualitas inter 1 q, & 20 ꝛ — 76 + √q 320. Ex numero ergo



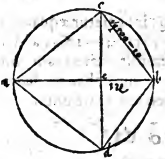
20 ꝛ — 76 + √q 320 ſic educitur radix quadrata. Semiſſis numeri radicum eſt 10, eius quadratum 100; ex quo ſi ſubtrahantur — 76 + √q 320, reſtant 24 + √q 320. Ex hoc binomio educitur radix hoc modo. Quadrata particularum ſunt 576. 320; differentia 256, cuius radix quadrata 16 addita, & ſubtracta maiori nomini cõflat 40, relinquit 8. ſemiſſes ſunt 20 & 4, eorum radices √q 20 + 2; quæ ſi ad ſemiſſem numeri radicum, nempe ad 10 addantur, fiunt 12 + √q 20, pars maior, quæ ſi ſubtrahatur ex 20, reſtat 8 — √q 20 pars minor.

PROPOSITIO VI.

EST CIRCVLVS, CVIVS diametrus linea perpendiculari proportionaliter eſt ſecta, & vna minorum chordarum eſt √q 500 — 10; quæritur quanta ſit diametrus, & reliquæ lineæ.

Sit chorda b c √q 500 — 10 partium, & quærantur a e, e b, a b, c a, c e. Quia a b in e proportionaliter eſt ſecta, erit,

erit, vt ab ad ae; ita ac ad eb; ſed quoq; eſt, vt ab ad bc; ita bc ad be, quod triangula acb, bce ſint æquiangula per 8 ſexti: ergo ae, bc ſunt æquales. Quia vero bc ponitur √q500 — 10; erit & ae totidem partium. Ponatur eb 1℞. Cum itaq; ec inter ae, eb ſit media proportionalis, erit ipſius quadratum æquale rectangulo ipſis ae, eb contento. Item cum triangulum bce ſit rectangulũ, erit quoq; quadratum ipſius ec æquale quadrato ipſius bc, minus quadrato ipſius eb:



ergo hoc √q500q — 10℞, huic 600 — √q 200000 — 1 q eſt æquale, ac facta reductione hæc 600 — √q 200000 — √q 500q — 10℞, huic 1 q. Extrahenda iam eſt radix ex hoc numero 600 — √q 200000 — √q 500 q — 10℞, cuius membrum hoc 600 — √q200000 eſt numerus abſolutus; hoc, — √q500q — 10℞, numerus radicum, cuius ſemiſſis eſt — √q125 — 5. Ad ſemiſſis quadratum, quod eſt + 150 — √q12500, additus abſolutus, conflat 750 — √q312500.

Additur autem abſolutus cum primarium ſignum ſit +, licet ſecundarium ſit —. Antequam autem ex hoc reſiduo, 750 — √q312500, ſubtrahamus ſemiſſem numeri radicum extrahenda prius eſt ex illo radix quadrata. Differentia igitur quadratorum eſt 250000, eius radix 500 addita, & ſubtracta maiori nomini, conflat 1250: relinquit 250. Semiſſes ſunt 625, 125 Radices ſemiſſium 25, √q125, quæ copulatæ ſigno —, ſic habet

25 —

25 — √q125. Vnde ſi ſubtrahatur ſemiſſis numeri radicum, ſcilicet √q125 — 5, reſtant 30 — √q500, pars minor e b. Cum ergo maior ſit √q500 — 10; erit tota a b, 20. E c √q (√q800000 — 800.) Si enim quadratum ipſius b e, quod eſt 1400 — √q1800000 ex quadrato ipſius b c, quod eſt, 600 — √q200000 tollatur, relinquetur quadratum ipſius e c; quod eſt √q800000 — 800. Additis vero quadratis ipſarum a e, e c conflatur quadratum ipſius a c √q200000 — 200: ergo ipſa ac erit √q (√q200000 — 200.)

Si ponatur diametrus a b 1ℛ, inuenietur æquatio inter 1q, & 600 — √q200000 + √q500q — 10ℛ; ac tandem extractis radicibus, erit ſemiſſis numeri radicum √q125 — 5, non ex 25 — √q125 ſubtrahenda, ſed addenda: quo facto exurgit diametrus 20 partium.

PROPOSITIO VII.

Eſt triangulum rectangulum, cuius baſis eſt 10 — √q28 partium, ſumma reliquorum laterum 26 + √q28: quæritur quantum ſit quodlibet reliquorum.



Eſto triangulum a b c, cuius baſis b c ſit 10 — √q28: ſumma reliquorum 26 + √q28. Pono a c, quod angulo recto opponitur, eſſe 1ℛ: erit igitur a b 26 + √q28 — 1ℛ. Et quia quadratum lateris A C eſt æquale, laterum A B, B C quadratis. Et eſt quadratum ipſius A C 1q: quadratũ ipſius A B 704 + √q75712 — √q112q — 52ℛ + 1q:

1q: ipſius BC, 128 — √q11200. Summa vtriuſq; AB, BC, 832+√q28672 — √q112q — 522℮+1q, quæ eſt æqualis ipſi 1q. Facta reductione, erunt hæc 832+√q 28672, his 522℮+√q112q æqualia. Diuiſis ergo 832 +√q28672 per 522℮+√112q, proueniũt 16, AC, quod ponebatur 1 2℮. Fit autem diuiſio hoc modo. Iuxta illa, quæ cap. 1. art. 4. lib. 3. de diuiſione dicta ſunt, mutetur ſignum + poſterioris particulæ diuiſoris in —, hoc modo 522℮ — √q112q, atque in diuiſorē hoc modo mutatum, ducatur tam diuiſor, quam diuidendus, & inuenietur nouus diuiſor 25925 & nouus diuidendus 41472. Facta iam diuiſione, prouenit quotus 16, latus AC. Quod ſi ſubtrahatur ex 26+√q28, reſtant 10+√q 28, latus AB.

APPENDIX.

DE CALCVLO Aſtronomico.

CAlculus aſtronomicus comprehendit motus, & tempora: vtraq; reperiuntur in orbibus cæleſtibus, quæritur enim, aut quanto tempore datus aliquis motus abſoluatur, aut quantus motus in dato aliquo tempore peragatur. In motu conſiderantur ſigna, gradus, minuta, ſecunda, tertia, quarta &c. Signum, aut eſt phyſicum, aut commune. Phyſicum, eſt ſexta pars circuli, continetque gradus 60 (nam totus circulus apud aſtronomos diuiditur

tur in 360 partes æquales, quas gradus appellant) Commune eſt duodecima pars circuli, continetq́; gradus 30. Gradus eſt trecenteſima ſexageſima pars circuli. Habet itaque circulus 12 ſigna communia: ſignum commune 30 gradus: gradus 60 minuta: minutum 60 ſecunda; ſecundum 60 tertia &c. gradus ſignãtur hoc ſigno °. Minuta hoc ′. ſecunda hoc ″. tertia hoc ‴. &c. Alij minuta vocant ſcrupula prima, ſecunda ſcrupula ſecunda, tertia ſcrupula tertia &c.

Tempus diuiditur in annos, menſes, dies, horas, minuta, ſecunda &c. Annus aut eſt aſtronomicus, aut ciuilis. Aſtronomicus ſecundum varios eſt varius. Alphonſini putant eſſe 365 dierum, 5 horarum, 49 minutorum, 16 ſecundorum. Ciuilis eſt duplex, communis & biſſextus. Communis habet dies 365, biſſextus 366. Menſis eſt dierum 31, aut 30, aut 28, aut etiam 29. Dies habet horas 24, hora minuta 60, minutum 60 ſecunda, &c.

Habent præterea tam gradus, quam anni, & dies ſexagenas. Sexagena diuiditur in primam, ſecundam, tertiam &c.

Exem-

Exempli cauſa 776000 gradus habent 3 ſexagenas tertias, 35 ſecundas, 33 primas, & præterea 20 gradus. Diuiſis enim 776000 per 60, proueniunt 12933 ſexagenæ primæ, reſtant 20 gradus. Diuiſis verò 129 33 per 60, proueniunt 215 ſexagenæ ſecundæ, reſtant 33 ſexagenæ primæ. Denique diuiſis 215 per 60, proueniunt 3 ſexagenæ terrtiæ, reſtant 35 ſexagenæ ſecundæ.

Item 590173 dies habent ſexagenas tertias 2, ſecundas 43, primas 46, dies 13. Nam diuiſis 590173 per 60, proueniunt 9836 ſexagenæ primæ, reſtant dies 13. Diuiſis verò 9836 per 60, proueniunt ſexagenæ ſecundæ 163, reſtant primæ 56. Diuiſis denique 163 per 60, proueniunt ſexagenæ tertiæ 2, reſtant ſecundæ 43. Anni 1616 habent ſexagenas primas 26, dies 56. Diuiſis enim 1616 per 60, proueniunt 26, reſtant 56 anni.

DE ADDITIONE ET *ſubtractione.*

In additione, & ſubtractione primo ſuppone ſibi mutuo numeros eiuſdem ſpeciei, vt ſigna

ſigna ſignis, gradus, gradibus, dies diebus, minuta minutis, ſecunda ſecundis &c.

Secundò, incipe à minimis, quæ verſus dextram poni ſolent, & in additione ſummam factam, ſi ſcrupula fuerint, diuide per 60, quotum ſerua pro ſequente operatione, reſiduum pone infra lineam. Si fuerint gradus, diuide ſummam per 30. ſi ſigna per 12, & quotum tanquam inutilem, omnino abiice, niſi in certis caſibus fuerit memoria conſeruãdus; ſi horæ per 24; ſi dies per 365, vt proueniant anni communes. Exemplum. volo addere, quæ in hac formula vides. Primo addo ſecunda, & conflo 101, quibus per 60 diuiſis, prouenit 1, reſtant 41, quæ pono ſub ſecundis. Et 1 pro ſequente operatione reſeruo.

S.	°.	'.	''.
9.	23.	42.	51
3.	17.	31.	46
7	9.	58.	4
8.	21.	12.	41

Deinde addo minuta, iiſque prius ſeruatum addo, & conflo 132, quibus per 60 diuiſis, proueniunt 2, reſtant 12, pono ergo 12 ſub minutis, reſeruo 2. Tertio addo gradus, & 2 prius ſeruata, efficioque 51: quibus per 30 diuiſis, quod vnum ſignum commune 30 gradus habeat, prouenit 1, reſtant 21. Igitur 21 ſubſcribo gradibus, 1 reſeruo. Denique addo ſigna, & pri-

& prius ſeruatum, & conflo 20; vnde reiecto integro circulo, ſeu 12 ſignis, reſtant 8, quæ ſignis ſuppono.

Nota ſi, vbi ſunt gradus, eſſent dies, ſummam fore per 24 diuidendam.

In ſubtractione, quando inferior eſt maior ſuperiore, debet ad ſuperiorem ex proximis verſus ſiniſtram poſitis aſſumi vnitas, quæ valet aut 60, aut 30, aut 24. Sexaginta ſi addantur ſcrupula, aut gradus ſignorum phyſicorum. 30; ſi addantur gradus ſignorum communium. 24 ſi horæ. Quæ vnitas cum ad ſigna aſſumitur, valet 12, aut 6, prout ſignum fuerit commune, aut phyſicum.

D.	H.	′	″
28.	4.	35.	15
23.	8.	54.	47
4.	19.	40.	28

Primum exemplum. Sint 23 D. 8 H. 54′. 47″. ex 28 D. 4 H. 35′. 15″ ſubtrahenda. Quia ſecunda inferiora ſuperant ſuperiora, addo ſuperioribus 60, vt fiant 75, ex quibus ſi ſubtraham 47, reſtant 28. Rurſus quia 54′ excedunt 34′ (34′ inquam, quia ex 35′ vnum ablatum antea fuit) addo 60, vt fiant 94, vnde ſubtractis 54, reſtant 40. Iterum, quia 8 H excedunt 3, (non 4, quod vna antea ſublata ſit) addo 24, vt fiant 27: vnde ſubtractis 8 H, reſtant 19 H.

M Deni-

Denique ſublatis 23 diebus, ex 27 D, reſtant 4 D.

Secundum exemplum. Sint 9 S. 18°. 22′. 32″, ex 3 S. 24°. 47′. 53″ ſubtrahenda. Subtractis ſecundis ex ſecundis reſtant 21″. Minutis ex minutis, 25′. gradibus ex gradibus, 6°. Vt verò ſubtrahas 9 ſigna ex 3, adde 12 ab 3, vt fiant 15, vnde ſubtractis 9, reſtant 6 ſigna.

S.	°	′	″
3.	24.	47.	53
9.	18.	22.	23
6.	6.	25.	21

De Multiplicatione, & diuiſione.

Circa Multiplicationem, & Diuiſionem nota primo gradus pro nota habere hanc circularem figurã °. Minuta hanc ′. Secunda hanc ″. Tertia hanc ‴. Quarta hanc ⁗. Quinta hãc ^{v}. &c. vt ſupra monui. Sexagenas primas hanc ˋ. Sexagenas ſecundas hanc ˵. Tertias hanc ‴. &c.

Nota ſecundo, in Multiplicatione, ſi notæ vtriuſq; multiplicantis eiuſdem ſint ſpeciei, hoc eſt, ſi vterq; multiplicans habeat notas tantum tales ″, ‴, ^{v}, &c: aut tantum tales ˋ, ˵, ‴. &c. eas eſſe addendas: ſi diuerſas, minorem ex maiore ſubtrahendam, vt habeatur producti nota.

Ter-

Tertiò, quando dies in motum diurnum, aut anni in annum ducuntur, habere tam dies, quam annos notam hanc ^{o}.

Quartò, initium à minimis faciendum; productum diuidendum per 60. Quotum operationi ſequenti reſeruandum. Ac demum reſiduum infra lineam ponendum.

Exemplum. Volo motum diurnum ſolis, qui eſt $\overset{\prime}{59}.\overset{\prime\prime}{8}.\overset{\prime\prime\prime}{11}.\overset{\prime\prime\prime\prime}{22}.\overset{v}{16}.\overset{v\prime}{11}.\overset{v\prime\prime}{15}$. ducere in 365 dies; ſiue in 6 ſexagenas primas dierum, & 5 dies, vt habeatur motus annuus. Sic igitur progredior. Duco 6 ſexagenas in $\overset{v\prime\prime}{15}$, & produco $\overset{v\prime}{90}$. quibus per 60. diuiſis,

$$\begin{array}{r}\overset{\prime}{59}.\ \overset{\prime\prime}{8}.\ \overset{\prime\prime\prime}{11}.\ \overset{\prime\prime\prime\prime}{22}.\ \overset{v}{16}.\ \overset{v\prime}{11}.\ \overset{v\prime\prime}{15} \\ 6 \\ \hline \grave{5}.\ \overset{o}{54}.\ 49.\ 8.\ 13.\ 37.\ 7.\ 30. \\ 4.\ 55.\ 40.\ 56.\ 51.\ 20.\ 56.\ 15 \\ \hline 5.\ 59.\ 44.\ 49.\ 10.\ 28.\ 28.\ 26.\ 15\end{array}$$

prouenit $\overset{v}{1}$, reſtant $\overset{v\prime}{30}$. Pono igitur $\overset{v\prime}{30}$ infra ſexta, retineo $\overset{v}{1}$ pro ſequente operatione. Secundo duco 6 in $\overset{v\prime}{11}$, & produco $\overset{v}{66}$, addo $\overset{v}{1}$ prius retentum, & efficio 67, quibus per 60 diuiſis, prouenit $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$, reſtant $\overset{v}{7}$. Poſitis igitur 7 infra quinta; reſeruato $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$, duco in $\overset{v}{16}$, & produco $\overset{\prime\prime\prime\prime}{96}$, addo $\overset{\prime\prime\prime\prime}{1}$ prius retentum, & conflo $\overset{\prime\prime\prime\prime}{97}$; quibus per 60 diuiſis, prouenit $\overset{\prime\prime\prime}{1}$; reſtant $\overset{\prime\prime\prime\prime}{37}$, &c. Ducto eodem modo

motu diurno in dies 5, produco 4°. $55'$. $40''$. $56'''$. $51''''$. 20^{v}. 56^{vi}. 15^{vii}, quæ ſi addantur prioribus, prouenit motus ſolis annuus, vt in formula apparet.

Ratio autem, cur ductis 6 ſexagenis in 15^{vii} proueniant 90^{vi} eſt, quod ſubtracta nota hac $^{\backprime}$ ex his^{vii} reſtet nota hæc^{vi}.

Habito motu annuo habebitur motus 60 annorum communium, ſi notæ ſcrupulorum vnitate minuantur, ſexagenarum augeantur, hoc modo $5^{\backprime\backprime}$. $59^{\backprime}$. 44°. $49'$. $10''$. $28'''$. $28''''$. 26^{v}. 15^{vi}. cui motui ſi addatur motus 15 dierum, prodibit motus 60 annorum noſtrorum. Motus 15 dierum eſt 14°. $47'$. $2''$. $50'''$. $34''''$. 2^{v}. 48^{vi}. 45^{vii}. hic motus additus motui 60 annorum communium, conflat motum annorum 60 noſtrorum ſiue Iulianorum hunc $5^{\backprime\backprime}$. $59^{\backprime}$. 59°. $36'$. $13''$. $19'''$. $2''''$. 29^{v}. 3^{vi}. 45^{vii}. Si rurſus notæ ſcrupulorum vnitate minuantur, ſexagenarum augeantur, exurget motus 3600 annorum Iulianorum, hic $5^{\backprime\backprime\backprime}$. $59^{\backprime\backprime}$. $59^{\backprime}$. 36°. $13'$. $19''$. $2'''$. $29''''$. 3^{v}. 45^{vi}. ex quo ſi motus 27 dierum tollatur, relinquitur motus 3600 annorum Gregorianorum, hic $5^{\backprime\backprime\backprime}$. $59^{\backprime\backprime}$. $59^{\backprime}$. 9°. $36'$. $37''$. $55'''$. $27''''$. 46^{v}. 41^{vi}. 15^{vii}. Motus dierum 27 eſt. 26°. $36'$. $41''$. $7'''$. $1''''$. 17^{v}. 3^{vi}. 45^{vii}. Tolli autem debet ex motu 3600 annorum Iulianorum motus 27 dierum, quod

quod 3600 anni Iuliani, ſiue veteris Calendarij excedant 3600 annos Gregorianos, ſiue noui Calendarij, 27 diebus. Centum annorum motum habebis, ſi motum 60 annorum Iulianorum, motus item 40 annorum communium, & 10 dierum coniungas, vt hic apparet.

"	`	°	'	''	'''	''''	v	vi	vii	
5	59	59	36	13	19	2	29	3	45	60. an.
3	59	49	52	46	58	58	57	30	0	40. an.
		9	51	21	53	42	41	52	30	10. d.
9	59	59	20	22	11	44	8	26	15	

Ideo autem motibus annorum 60 Iulianorum, & 40 communium addi debet motus 10 dierum, quod 40 anni communes habeant 10 dies intercalares. Si motum 100 annorum duplices, habebis motum 200 annorum: ſi motus 100, & 200 annorum coniungas, habebis motum 300 annorum &c. Eodem modo menſium, & annorum duorum, trium, quatuor &c. motus colliges.

De Diuiſione, quæ in hæc pragmatia exigui vſus eſt, has ſpeculationes accipe. Primo cum gradus per gradus diuiduntur proueniunt gradus. Secundò, cum diuiduntur gradus, ſiue ° per ′. ″. ‴. &c, proueniunt \`. \`\`. \`\`\`. &c. Et contra

cum°, ſiue gradus per ‵. ‶. ‷. &c. diuiduntur, proueniunt ′. ″. ‴. &c. Tertiò, cum diuiduntur ′. ″. ‴ &c. per gradus, proueniunt ′. ″. ‴. &c. cum verò ‵. ‶. ‷. &c. per gradus diuiduntur, proueniunt ‵. ‶. ‷. &c. Quartò, cum diuiſor, & diuidendus habuerint notas eiuſdem ſpeciei, ſuperaueritque nota diuidendi notã diuiſoris, ſubtrahitur minor ex maiore, eritque reſiduum nota quoti. Si contra nota Diuiſoris ſuperauerit notam diuidendi, fit eadem ſubtractio notarum: ſed ex votis ′. ″. ‴. fiunt ‵. ‶. ‷. & ex ‵. ‶. ‷. fiunt ′. ″. ‴.

Quintò. Cum ′. ″. ‴. diuiduntur per ‵. ‶. ‷: aut ‵. ‶. ‷. per ′. ″. ‴. fit additio notarum, & quotus retinet notam diuidendi. Vt ſi diuidantur ″ per ‵, proueniunt ‴. Si ‷ per ″ proueniunt ‵‵‵‵‵. Sed hæc de calculo aſtronomico, & vniuerſa Arithmetica ad honorẽ Dei ter Opt. Max. Et glorioſæ Virg. Matris dicta ſint.

Appendix Secvnda.

De Divinationibvs vulgaribus.

Quia intelligo quoſdam huiuſmodi diuinationibus delectari, placuit in eorum gratiam vnam, aut alteram appendere.

Divi-

DIVINATIO I.

QVOMODO NVMERUS, quem quis animo concepit, inueſtigetur.

Iube numerum conceptum triplicari : triplicatum ſi par ſit dimidiari : ſi impar addi vnitatẽ, poſtea dimidiari. Dimidiatum iube rurſus triplicari: triplicatum ſi par ſit dimidiari : ſi impar, addi vnitatem; & poſtea dimidiari. Poſtremum dimidiatũ iube diuidi per 9, & quotum tibi dici, quem duc in 4,& producto adde 1. ſi primæ triplicationi addita eſt vnitas: 2, ſi ſecundæ, proditque numerus quem alter animo concepit.

Exemplum. Conceperit 11 : quæ triplicato faciunt 33; qui numerus, quia eſt impar, addatur ei vnitas, vt fiant 34. Dimidium eſt 17, quod triplicatum facit 51; ſed quia impar eſt, addatur vnitas, vt fiant 52. dimidium 26 diuiſum per 9 reddit 2, quæ in 4 ducta faciunt 8; quibus, quod vtrique triplicationi addita ſit vnitas, iunge 3, & conficies 11, numerum quem alter animo concepit.

Aliud. Conceperit quis 10: triplũ eſt 30. Dimi-

dium 15; quod triplicatum facit 45; addatur, quia impar, vnitas, vt fiant 46. Cuius dimidium diuiſum per 9 reddit 2: quæ in 4 ducta faciunt 8: quibus; quia ſecundæ triplicationi addita eſt vnitas, iunge 2, & fient 10 numerus conceptus.

Aliud. Conceperit quis 17. Triplum eſt 51: cui, quod impar, adde 1. vt fiant 52. Dimidium 26 triplicatum facit 78; huius dimidium 39 diuiſum per 9 reddit 4, quæ in 4 ducta faciunt 16; quibus, quod primæ triplicationi addita ſit vnitas, iunge 1. & prodibunt 17, numerus conceptus.

Aliud. Conceperit quis 20. Triplum eſt 60: dimidium 30; triplum huius 90: dimidium 45, quod diuiſum per 9, reddit, 5, quæ ducta in 4, producunt 20, numerum conceptum.

Secvnda Divinatio.

Res abscondita quomodo inueſtigetur.

Sint aliquot perſonæ, quarum vna in certi digiti certo articulo habeat annulum; poteſ ſcire, quæ perſona, in quo digito, & articulo annulum habeat. Conſtitue apud te certum perſonarum ordinem, quæ nimirum ſit prima,

quæ

quæ ſecunda, &c. Idem de digitis 10, & 3 articulis facito. Poteſt autem pollex dextræ primus, pollex ſiniſtræ vltimus intelligi, vt & articulus proximus vngui primus proximus radici vltimus. His ſic cõſtitutis, iube à prima perſona verſus vltimã numerari vſq; ad illam, quæ annulũ habet; & numerũ duplicari, duplicato addi 5; hanc ſummã duci in 5; producto addi numerũ articuli, in quo annulus eſt; hanc ſummã duci in 10, producto addi numerũ articuli, in quo annulus eſt: tandẽ ex tota ſumma ſubtrahi 250, ac reliquũ tibi indicari; indicabit enim numerus primus verſus dextram articulũ, ſecundus digitum, tertius perſona, idem, ſi plures quam tres ſint, præſtabunt poſteriores.

Exemplum. Sint 20 perſonæ, habeatque duodecima annulum in digito ſexto, hoc eſt, in auricularis manus ſiniſtræ articulo medio, qui eſt ſecundus. Iube duplicari 12, vt fiant 24, his adde 5, vt conflentur 29: hæc duci in 5, vt fiant 145: his rurſus addi 6, numerum digiti, vt fiant 151: hæc duci in 10, vt producantur 1510; quibus ſi addantur 2, numerus articuli, conflabis 1512: vnde ſi ſubtrahas 250, reſtant 12 | 6 | 2: habet ergo 12 perſona in ſexti digiti articulo ſecundo annulum, hoc eſt, in articulo medio digiti auricularis manus ſiniſtræ.

Notabis poſſe duplo perſonarum etiam alium numerum quam 5 addi, vt 1.2.3.4.6. &c. Sed ſi 1 addatur, erunt ex poſtrema ſumma 50 abijcienda: ſi 2, centum: ſi 3 centum quinquaginta: ſi 4 ducenta: ſi 6 trecenta, &c.

Tertia Divinatio.

QVO MODO TRES RES abſconditæ inueſtigentur.

Conſtitue inter tres perſonas, & res abſconditas ordinem, vt quæ perſona ſit prima, quæ ſecunda, quæ tertia. Item, quæ res ſit prima, quæ ſecunda, quæ tertia: ſit A prima, B ſecunda, C tertia. Deinde proijce in menſam, vbi perſonæ ſedent 24 calculos, & da perſonæ primæ 1, ſecundæ 2, tertiæ 3, recedenſque iube, vt quælibet perſona ex tribus rebus abſcondat, quam libuerit, ſic tamen, vt quæ primam abſconderit, accipiat tot calculos, quot antea habebat; quæ ſecundam, duplum prioris; quæ tertiam, quadruplum. Quo facto vide quot calculi in menſa remaneant. Si namque remaneat vnus, accepit prima perſona A, ſecunda B, tertia C. Si duo; accepit prima B, ſecunda A, tertia C. Si 3, accepit prima A, ſecunda C, tertia

tertia B. Si 5 (neque enim 4 remanere poſſunt) accepit prima B, ſecunda C, tertia A. Si 6, accepit prima C, ſecunda A, tertia B. Si 7, accepit prima C, ſecunda B, tertia A, aſpice hanc tabellam.

1	1	A
	2	B
	3	C
2	1	B
	2	A
	3	C
3	1	A
	2	C
	3	B
5	1	B
	2	C
	3	A
6	1	C
	2	A
	3	B
7	1	C
	2	B
	3	A

Oritur hæc diuinatio eſt rerum cõbinationibus. Poſſunt namque duæ res bis: tres ſexies: quatuor vicies quater: quinq; certies vicies cõbinari. Vt autẽ ſcias, quot modis quotcũq; res cõbinari poſſint, pone ordine tot numeros, quot ſunt res cõbinandę incipiendo ab vnitate, eoſq; ſigillatim in ſe ducito, hoc eſt, primum in ſecũdum, productum in tertiũ, & hoc productum in quartũ, &c. Vt ſi ſcire velis quot modis ſex res combinari poſſint, pone 6 numeros hoc ordine 1.2.3.4.5.6. Duc 1 in 2, & produces 2; hæc in 3, & produces 6, hæc in 4 & produces 24; hæc in 5, & produces 120; hæc in 6, & produces 720: Poſſunt igitur ſex res, v.g. Sex literæ A, B, C, D, E, F ſeptingenties vicies combinari.

INDEX CAPITVM ET ARTICVLORVM.

Liber I.

Caput I. pag. I.

Art. I. De Numeratione pag. 2
Art. II. De Additione pag. 4
Art. III. De Subtractione pag. 7 } integrorum.
Art. IV. De Multiplicatione pag. 9
Art. V. De Diuiſione pag. 13

Caput II.

Art. I. De Reductione ad minores terminos. pag. 21
Art. II. De Reductione ad eandem denominationem pag. 23 } numerorum
Art. III. De Additione & Subtractione p. 25 } fractorum.
Art. IV. De Multiplicatione & Diuiſione pag. 27
Art. V. De fractis fractorum. pag. 28

Caput III.

Art. I. De Regula proportionum pag. 29
De directa ſimplici pag. 30
De reciproca ſimplici pag. 37
De compoſita directa pag. 38
De reciproca compoſita pag. 40
Art. II. De regula conſortij pag. 41
Art. III. De regula alligationis pag. 44
Art. IV. De regula poſitionum. pag. 48

Ca-

Caput IIII.

Art. I. De numero abſolutè conſiderato. pag. 53
Art. II. De numero relato, & proportionibus p. 55
Art. III. De proportionum compoſitione p. 57
Art. IV. De Analogia, ſiue proportionalitate p. 58
De Progreſſione Arithmetica ibid.
Regulæ Progreſſionis Arithmeticæ p. 59
Proprietates progreſſionis Arithmeticæ p. 60
De progreſſione Geometrica p. 61
Proprietates progreſſionis Geometricæ p. 62
De progreßione Muſica p. 63
Art. V. De numero figuras geometricas repræſentante p. 65
De numeris planis p. 66
De numero ſolido p. 70

Caput V.

De radicum extractionibus pag. 72
De tabula radicum, & graduum p. 73
Art. I. Conſtructio tabulæ pro extrahendis radicib. p. 75
Art. II. De extrahendis omnis generis Radicibus p. 77
De Extractione Radicis quadratæ p. 78
De vulgari extractione Radicis quadratæ p. 80
De extractione Radicis cubicæ p. 81
De extractione ſuperſolidi primi p. 83
De extractione radicum ex numeris fractis p. 85
Demonſtratio extractionis Radicum p. 86

Liber II. pag. 87.

De numero rationali coſſico pag. ead.

Caput I.

De elementis numerorum coßicorum p. 88

Art.

Art. I. De ſimplicium coſsicorum Additione; & ſubtractione pag. 89
Art. II. De Multiplicatione & Diuiſione ſimplicium coſſicorum pag. ead.
Art. III. De Additione, & Subtractione Compoſitorum, & Diminutorum pag. 91
Art. IIII. De Multiplicatione, & Diuiſione Compoſit. & Diminut. pag. 92
Art. V. De Radicum extractione pag. 95
Art. VI. De elementis ſecundarum radicum pag. 98

Caput II.

De Regula Algebræ, & eius explicatione p. 99
Art. I. De æquationis inuentione p. 100
Art. II. De Reductione æquationis p. 102
Art. III. De Diuiſione, & Radicis extractione p. 103

Caput III.

De praxi numerorum coſsicorum p. 105
Art. I. Exempla, in quibus aut diuiſor eſt unitas, aut nulla Reductione opus eſt p. 106
Art. II. Exempla, quæ ſola Diuiſio ſoluit p. 110
Art. III. Exempla, quæ Extractio Radicis ſoluit. pag. 117
Art. IV. Exempla ſecundarum radicum p. 123
Art. V. Exempla geometrica p. 129
Art. VI. Exempla contractè propoſita, & abſtractè ſoluta. p. 133

LIBER TERTIVS.

Quid ſit numerus irrationalis abſolutus. p. 137

Quot

Quot ſint ſpecies numerorum irrationalium abſolutorum. pag. 137

Caput I.

Art. I. De Additione, & Subtractione irrationalium ſimplicium pag. 139
Art. II. De Multiplicatione, & Diuiſione irrationalium ſimplicium p. 142
Art. III. De Additione, & Subtractione Compoſitorum, & Diminutorum pag. 144
Art. IV. De Multiplicatione, & Diuiſione Compoſ. & Diminut. p. 146
Art. V. De vniuerſalium calculo p. 148
Art. VI. De binomijs, & reſiduis p. 150
Art. VII. De radicum extractione ex binomijs, & reſiduis pag. 151

Caput I.

Propoſitiones numerorum irrationalium abſolutorum pag. 152

LIBER IV.

De numeris irrationalibus Coſsicis.

Caput. I. De calculo irrationalium coſsicorum. p. 158
Caput II. De vſu, & praxi irrationalium coſsicorū. p. 159

APPENDICES.

I. De Calculo Aſtronomico. p. 166
II. De Vulgaribus Diuinationibus. p. 175

INDEX

INDEX RERVM PRÆCIPVARVM.

Abbreuiatio characterum coſsicorum lib. 2. cap. 1. a. 2. & c. 3. a. 4.
Additio integrorum numerorum lib. 1. c. 1. a. 1
Additio fractorum lib. 1. c. 2. art. 3
Additio proportionum lib. 1. cap. 3. a. 3
Additio conſonantiarum lib. 1. c. 4. a. 4
Additio coſsicorum ſimplicium lib. 2. c. 1. a. 1
Additio coſsicorum compoſitorum, & diminutorum lib. 2 c. 1. a. 3
Additio ſecundarum radicum lib 2. cap. 1. a. 6
Additio irrationalium ſimplicium lib. 3. c. 1. a. 1
Additio irrationalium compoſitorum, & diminutorum lib. 3. c. 1. a. 3
Additio radicum vniuerſalium lib. 3. c. 1. a. 5
Additio irrationalium coſsicorum lib. 4. c. 1
Additio Aſtronomica. App. 1.
Altera parte longior numerus lib. 1. c. 4. a. 5
Abſolutus numerus quis lib. 1. c. 4. a. 1
Abundans numerus quis lib. 1. c. 4. a. 1
Algebra vnde dicta lib. 2. initio.
Algebra regula, & eius partes lib. 2. c. 2. a. 1. 2. 3
Alligationis regula lib. 1. c. 3. a. 3
Analogia quid lib. 1. c. 4. a. 4
Archimedis inuentum lib. 1. c. 3. a. 3
Æquationis Algebraicæ inuentio l. 2. c. 2. a. 1
Æquationis Algebraicæ reductio l. 2. c. 2. a. 2
Æquationis Algebraicæ reſolutio l. 2. c. 2. a. 3
Apotome quid l. 3. initio.
Biquadratum vnde naſcatur l. 1. c. 5. c. 4. a. 4

Bino-

Binomium quid lib.3.c.1.a.6
Characteres coſſici, qui, & quomodo creentur l.1.c.5
Columnæ quomodo fiant l.1.c.4.a.5
Commenſurabilium irrationalium Additio, & Subtractio
Combinatio rerum in App.2 (l.3.c.1.a.1
Compoſitus numerus quis l.1.c.4.a.1
Compoſiti numeri inter ſe qui l.1.c.4.a.1
Conſonantiæ muſicæ quot, & quomodo diuidātur. l.1.c.4.a.4
Conſonātiæ muſicæ ex quib. numeris cōponantur. l.1.c.4.a.4
Conſortij regula l.1.c.3.a.2
Coſſa vnde dicta lib.2.initio
Cubici numeri quomodo fiant l.1.c.5, & 4.a.4
Cubum qui impares conſtituant l.1.c.4.a.5.in annot.
Cubi ex cognitione quales quæſt. ſoluātur l.1.c.4.a.5.an.2
Decagoni latus inuenire lib.3.c.2.prop.2
Denominator quid lib.1.cap.2
Διὰ πασῶν *quid* l.1.c.4.a.4
Διὰ πεντὲ *quid* l.1.c.4.a.4
Διὰ τεσσάρων *quid* l.1.c.4.a.4
Diminutus numerus quis l.1.c.4.a.1
Diſiunctæ radices quæ l.3.circa finem
Diuiſio numerorum integrorum lib.1.c.1.a.5
Diuiſio fractorum l.1.c.2.a.4
Diuiſio proportionum l.1.c.4.a.3
Diuiſio Coßicorum ſimplicium l.2.c.1.a.2
Diuiſio Coßicorum Compoſit. & Diminut. l.2.c.1.a.4
Diuiſio ſecundarum radicum l.2.c.1.a.6
Diuiſio irrationalium ſimplicium lib.3.c.1.a.2
Diuiſio irrationalium Compoſit. & Diminut. l.3.c.1.a.4
Diuiſio vniuerſalium l.3.c.1.a.5
Diuiſio irrationalium coßicorum l.4.c.1

Diuiſio aſtronomica. App. 1
Diuinatio. App. 2
Elementa Arithmetica quot lib. 1. c. 1
Exempla regulæ proportionis ſimplicis directæ l. 1. c. 3. a. 1
Exempla regulæ proportionis compoſitæ directæ l. 1. c. 3. a. 1
Exempla regulæ Reciprocæ ſimplicis l. 1. c. 3. a. 1
Exempla Regulæ Reciprocæ compoſitæ l. 1. c. 3. a. 1
Exempla regulæ Alligationis l. 1. c. 3. a. 3
Exempla regulæ Conſortij l. 1. c. 3. a. 2
Exempla regulæ vnius poſitionis l. 1. c. 3. a. 4
Exempla regulæ duplicis poſitionis l. 1. c. 3. a. 4
Exempla, in quibus vel vnitas eſt Diuiſor, vel nulla reductione opus eſt. l. 2. c. 3. a. 1
Exempla, quæ ſola Diuiſio ſoluit l. 2. c. 3. a. 2
Exempla, quæ extractio radicis ſoluit l. 2. c. 3. a. 3
Exempla ſecundarum radicum l. 2. c. 3. a. 3
Exempla Geometrica l. 2. c. 3. a. 5
Exēpla contractè propoſita, & abſtractè ſoluta l. 2. c. 3. a. 6
Extractionis radicum formula l. 1. c. 5. a. 1
Extractionis radicis ex numeris integris l. 1. c. 5. a. 2
Extractio radicis ex numeris fractis l. 1. c. 5. a. 2
Extractio radicis ex numeris coſſicis l. 2. c. 2. a. 5
Extractio radicis ex Binomijs, & Reſiduis l. 3. c. 2. a. 7
Extractionis radicum examen l. 1. c. 5. a. 2
Extractionis radicum demonſtratio l. 1. c. 5. 2
Fractus numerus quis l. 1. c. 2
Fracti quomodo ad eandem Denominationem reducantur. lib. 2. cap. 3. art. 2
Fracti fractorum qui l. 1. c. 2. a. 5
Fractorum Additio, & Subtractio l. 1. c. 2. a. 3

Fractorum Multiplicatio, & Diuiſio l.1.c.2.a.4
Fractus in fractum ductus cur minus vtroq; fracto producat l.1.c.4.a.5.an.2
Fractus in integrum ductus, cur minus integro producat. l.1.c.4.a.5.an.2
Fractus per fractum, aut integrum ſi diuidatur cur plus proueniat, vt ſupra. ibid.
Gemma Friſij regula fallit l.1.c.3.a.1
Geometrica exempla l.2.c.3.a.5
Gradus quid. in App.1
Gradus quomodo extendantur l.1.c.5
Heptagoni numeri vnde fiant l.1.c.4.a.5
Hexagoni latus inuenire l.3.c.2.p.2
Hexagoni numeri vnde creentur l.1.c.4.a.5
Hieronis quæſtio Archimedi propoſita l.1.c.3.a.3
Hora quot habeat minuta. In App.1.
Impar numerus quis l.1.c.4.a.1
Irrationalium ſimplicium Additio, & Subtractio l.3.c.1.a.1
Irrationalium Compoſit. & Diminut. Additio, & Subtractio. l.3.c.1.a.3
Irrationalium coſsicorum Additio, & Subtractio l.4.c.1
Irrationalium ſimplicium Multiplicatio & Diuiſio l.3 c.1.a.2
Irrationalium compoſ. & dimin. Multiplicatio & Diuiſio l.3.c.1.a.4
Irrationalium coſsicorum Multiplicatio, & Diuiſio l.4.c.1
Irrationales diuerſos habentes characteres quomodo ad eoſdem reducantur l.3.c.1.a.1
Irrationales numeri an ſint veri numeri l.3.ante c.1
Irrationalium vniuerſalium calculus l.3.c.1.a.5

Latera hexagoni, tetragoni, trigoni, pentagoni, octogoni, & decagoni inuenire l.3.c.2.p.2
Latus quid l.2.l.1.c.4.a.5
Ligata radix quid l.3.circ.init.
Mediales qui numeri dicantur l.3.init.
Medios proportionales inuenire l.3.c.1.a.2.an.
Menſura communis duorum numerorum pag.22
Minutum quid. In App.1.
Multiplicatio integrorum rationalium l.1.c.1.a.4
Multiplicatio fractorum l.1.c.2.a.4
Multiplicatio ſimplicium coßicorum l.2.c.1.a.2
Multiplicatio Compoſit. & Diminut. coſſic. l.2.c.1.a.4
Multiplicatio irrationalium ſimplicium l.3.c.1.a.2
Multiplicatio Compoſ. & Dimin. irrationaliū l.3.c.1.a.4
Multiplicatio vniuerſalium l.3.c.1.a.5
Multiplicatio irrationalium coßicorum l.4.c.1
Muſica progreſſio, & numeri l.1.c.4.a.4
Multiplicatio aſtronomica: In App. 1
Numeratio quid l.1.c.1.a.1
Numerus rationalis abſolutus quid l.1.c.1
Numerus fractus quid l.1.c.2
Numerus irrationalis quid l.3.initio.
Numerator quid l.1.c.2
Numerum datum proportionaliter ſecare l.3.c.2.propoſ.1
Par numerus quis l.1.c.4.a.1
Planus numerus l.1.c.4.a.5
Parallelepipedum quid l.1.c.4.a.5
Perfectus numerus quis, & quomodo inueniatur. lib.1 cap.4.art.1
Primus numerus l.1.c.4.a.1
Primi numeri inter ſe qui l.1.c.4.a.1

Poſi-

Poſitionis ſimplicis regula — l.1.c.3.a.4
Poſitionis duplicis regula — l.1.c.3.a.3
Praxis Italica cur omiſſa — l.1.c.3.a.3
Progreſſio Arithmetica quid — l.1.c.4.a.4
Progreßionis Arithmeticæ regula — l.1.c.4.a.4
Progreßionis Arithmeticæ proprietates — l.1.c.4.a.4
Progreßio geometrica quid — l.1.c.4.a.4
Progreßionis geometricæ proprietates — l.1.c.4.a.4
Progreßio Muſica — l.1.c.4.a.4
Proportio quid & quotuplex — l.1.c.3.a.2
Proportionum Compoſitio — l.1.c.3.a.3
Proportionum Regula — l.1.c.3.a.1
Proportionum Regula ſimplex directa — l.1.c.3.a.1
Proportionum Regula directa Reciproca — l.1.c.3.a.1
Proportionum Regula compoſita directa — l.1.c.3.a.1
Proportionum Regula compoſita reciproca — l.1.c.3.a.1
Proportionales medios quotcunq; inter duos datos inuenire. l.3.c.1.a.2.ann.
Pyramis quid — l.1.c.4.a.5
Quotus quid — l.1.c.1.a.5
Quadratus numerus quid, & vnde naſcatur — l.1.c.4.a.5 l.1.c.5.initio.
Quadrinomium quid — l.3.initio
Quadraticubi vnde fiant. — l.1.c.5.initio.
Radix quid — l.1.c.5
Radicum & graduum tabula — l.1.c.4.a.5
Radices ſurdæ quomodo diuidantur — l.3.initio
Radicum extractio — l.1.c.5.a.2.l.2.c.1.a.5.l.3.c.2.a.7
Radices compoſitæ — l.3.initio
Radices ligatæ — l.3.initio
Radices vniuerſales — l.3.initio

Radices ſecunda l 2.c.1.a.6
Relatus numerus quis l.1.c.3.a.2
Regularium corporum latera inuenire l.3.c.2.prop.6
Scrupula quid in App. 1.
Signum phyſicum quid in App.1.
Signum commune quid in Ap.1.
Solidus numerus quis l.1.c.4.a.5
Subtractio integrorum l.1.c.1.a.3
Subtractio fractorum l.1.c.2.a.3
Subtractio proportionum l.1.c.3.a.3
Subtractio conſonantiarum l.1.c.4.a.4
Subtractio coßicorum ſimplicium l.2.c.1.a.1
Subtractio coßicorum compoſit.& diminut. l.2.c.1.a.3
Subtractio ſecundarum Radicum l.2.c.1.a.6
Subtractio irrationalium ſimplicium l.3.c.1.a.1
Subtractio irrationalium Compoſ. & Dimin. l.3.c.1.a.3
Subtractio vniuerſalium radicum l.3.c.1.a.5
Subtractio irrationalium coßicorum l.4.c.1
Subtractio Aſtronomica. In Append.1.
Superſolidum quid l.1.c.5,lib.2.initio
Tetragoni latus inuenire l.3.c.2.Propoſ.2
Trigoni latus inuenire l.3.c.2.prop.2
Trianguli Iſoſcelis & æquilateri aream inuenire. l.3.c.2. propoſ.4
Triangularis numerus quis l.1.c.4.a.5
Trianguli ſcaleni aream inuenire l.3.c.2.propoſ.3
Trinomium quid l.3.initio
Vniuerſalis Radix quid l.3.c.1.a.5
Zenſus quid l.2.initio
Zenſizenſus quid l.2.initio
Zenſicubus quid l.2.initio

NB.

NB. Beneuole lector, proportiones ſuperpartientes, quę ſunt inter 7. & 5. inter 14 & 10. inter 27 & 17. inter 81 & 51. Item multiplices ſuperpartientes, quæ ſunt inter 34. & 7. inter 14 & 5. non vt lib. 1. c. 4. a. 2. pag. 56 per incuriam factum eſt pronunciari; ſed prima & ſecunda dicuntur ſuperbipartientes quintas, tertia & quarta, ſuperdecupartientes decimas ſeptimas; quinta, quadrupla ſuperſextupartiens ſeptimas. Sexta, dupla ſuperquadrupartiens quintas; ſemper enim exceſſus maioris ſuper minorem voci ſuperpartiens inſeritur, & minoris proportionis terminus ſolitariè ponitur. Vt quia 7. excedit 5. binario, dicitur proportio 7 ad 5 ſuperbipartiens quintas. Cur verò, quæ eſt inter 14 & 10. vocetur ſuperbipartiens quintas, non verò ſuperquadrupartiens decimas; & quæ eſt inter 81 & 51. vocetur ſuperdecupartiens decimas ſeptimas, ratio eſt, quia nec 14 & 10. nec 81 & 51. ſunt numeri inter ſe primi, ſed compoſiti, habentq; cõmunem menſuram, illi quidem hanc 2. hi verò hanc 3. fit vt ſi per menſuras illas diuidantur, reducantur ad has, 7. 5. & has 27. 17. vnde priores dicuntur habere proportionem ſuperbipartientem quintas; poſteriores ſuperdecupartientem decimas ſeptimas.

Proportio quoque hæc $5\frac{3}{8}$ quæ habetur art. 3. pag. 57. dicitur quintupla ſupertripartiens octauas; hæc $3\frac{3}{7}$ tripla ſupertripartiens ſeptimas; hæc $7\frac{5}{7}$ ſeptupla ſuperquintupartiens ſeptimas; hæc $4\frac{3}{4}$ quadrupla ſupertripartiens quartas. Idem iudicium eſto de alijs ſi quæ occurrant.

Errata sic Corrige.

Pag.75.v.pen.vtcunq;. pag.82.v.20.46.pag.83.v. 18.8B, pag. 88 v. 15. dele alterum 2q. pag. 92.v. 11. — 6 ce.pag.94.v.6.12ze + 5.v.7.3ce + &c.v.17.+48 ze + 240.pag. 105.v.20.poſſent hac.pag. 106.v.2.ſecunda.pag. 108.v.27.poſt ducta adde, faciunt.pag. 109. v.11.tollam 6.pag.112.v.2.$2\frac{1}{4}$ze pag. 113.v.7.10 — 12e.pag.114.v.12.reliqui.v.17.atq; v.18.reſtant.v. penult.ducas in 3.v.vlt.dele, in 3.pag.116.v.21.238.p. 117 v.16.28ce.pag.118.v.4.22.v.10.202ze — 19.v. antepen.9801.pag.119.v.7.12 — 12e.v.13.42ze — 24. pag.120.v.14.441 + 19.v.23.$\frac{3}{4}$ v.antepen.radices.pag. 121.v.5.13.pag.121.v.8.382.v.26.392e.pag.123.v. 19.pro 16.pone 10.pag.153.v.12.b 1.6. Cætera Grammatica & Arithmetica vel modicum peritus facilè emendabit.

FINIS.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

187

A. PANDIMIGLIO - ROMA - LEGATORIA
1921